

Modelli autoregressivi con coefficienti stocastici ed effetti asimmetrici nella volatilità dei rendimenti azionari

Giuseppe Storti

Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche, Università di Salerno
E-mail: storti@unisa.it

Summary: In this paper a new approach to the estimation of *leverage* effects in the conditional variance of financial time series is presented. More precisely, within our approach, *leverage* effects are dealt with by including into the model for the conditional variance interactions between past returns and volatilities. The proposed model is applied to the time series of returns relative to six well known stock market indexes: S&P 500, MIB30, DAX30, CAC40, SWISS Market-Price Index and IBEX35I.

Key words: Volatility, Leverage effects, Constrained CPV model, Random Coefficient Autoregressive models, GARCH.

1. Introduzione

Nell'analisi di serie storiche finanziarie si è spesso osservata la presenza di correlazione negativa fra rendimenti e varianza condizionata (o *volatilità*) della serie. La presenza di tale correlazione suggerisce la necessità di ricorrere ad un modello nel quale, a parità di magnitudine, rendimenti positivi e negativi influiscano diversamente sulla varianza condizionata futura e, ragionevolmente, un incremento in varianza maggiore sarà associato al verificarsi di rendimenti negativi. L'asimmetria insita in tale relazione si connatura in quello che nella letteratura anglosassone viene

detto *leverage effect*. Nel corso dell'ultimo decennio, diversi sono stati gli autori che hanno proposto modelli in grado di isolare e quantificare effetti del tipo descritto. Ricordiamo, fra gli altri, Nelson (1991) e Rabemananjara e Zakoian (1993).

Nel presente lavoro si propone un approccio, alternativo a quelli precedentemente proposti in letteratura, il quale si basa sull'impiego di una particolare classe di modelli autoregressivi con coefficienti stocastici in cui figurano anche, quali variabili esplicative, valori passati della varianza condizionata della serie. Al fine di tenere conto della presenza di effetti di *leverage*, l'equazione per la varianza condizionata include dei termini di interazione fra rendimenti e volatilità passate.

Il lavoro è strutturato come segue. Nella sezione 2 viene descritto l'approccio proposto mentre nella sezione 3 vengono presentati i risultati di un'applicazione alle serie storiche dei rendimenti relativi ad alcuni ben noti indici sintetici dell'andamento del mercato azionario. Alcune considerazioni conclusive, infine, vengono presentate nella sezione 4.

2. Il modello

Sia u_t un processo osservabile tale che $(u_t|I^{t-1}) \sim N(0, h_t^2)$, $\forall t$, e dove I^t è l'informazione disponibile al tempo t . Si consideri un modello del tipo CPV-C (Storti, 1999) di ordine (r, s) :

$$u_t = \sum_{i=1}^r a_{i,t} u_{t-i} + \sum_{j=1}^s b_{j,t} h_{t-j} + e_t \quad (1)$$

dove $a_{i,t}$ e $b_{j,t}$ sono delle successioni di variabili casuali *iid* e, inoltre, posto $\boldsymbol{\theta}_t = [a_{1,t}, \dots, a_{r,t}, b_{1,t}, \dots, b_{s,t}]'$:

$$E(\boldsymbol{\theta}_t) = E(\boldsymbol{\theta}_t|I^{t-1}) = \mathbf{0} \quad Var(\boldsymbol{\theta}_t) = Var(\boldsymbol{\theta}_t|I^{t-1}) = \mathbf{Q} \quad (2)$$

ed $e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$ è un termine di errore white noise, indipendente da $\boldsymbol{\theta}_t$ (per $i=1, \dots, r; j=1, \dots, s$ e $t=1, \dots, T$). Una discussione delle analogie esistenti fra modelli autoregressivi con coefficienti stocastici e modelli condizionalmente eteroschedastici la si può trovare in Tsay (1987).

La varianza condizionata di u_t , data l'informazione passata I^{t-1} , è data da:

$$\begin{aligned}
h_t^2 &= \mathbf{C}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{C}_t' + \sigma_e^2 \\
&= \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^r \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \gamma_{i,j} u_{t-i} h_{t-j} \\
&\quad + \sum_{i \neq j} \delta_{i,j} u_{t-i} u_{t-j} + \sum_{i \neq j} \eta_{i,j} h_{t-i} h_{t-j}
\end{aligned}$$

con $\mathbf{C}_t = [u_{t-1}, \dots, u_{t-r}, h_{t-1}, \dots, h_{t-s}]$ e dove $\sigma_e^2, \alpha_i, \beta_j, \gamma_{i,j}, \delta_{i,j}, \eta_{i,j}$ sono dei parametri incogniti da stimare. Imponendo delle opportune restrizioni sulla struttura della matrice \mathbf{Q} e, in particolare, assumendo che essa sia di tipo diagonale a blocchi, è possibile giungere ad una parametrizzazione più parsimoniosa rispetto alla precedente data da:

$$h_t^2 = \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^r \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}^2 + 2 \sum_{k=1}^{r^*} \gamma_{k,k} u_{t-k} h_{t-k} \quad (3)$$

con $r^* = \min(r, s)$, nella quale eventuali effetti di *leverage* sono spiegati dalle interazioni fra rendimenti e volatilità passate. In particolare, per $\gamma_{k,k} < 0$, una quantità positiva viene addizionata a h_t^2 se $u_{t-k} < 0$ mentre la stessa quantità viene sottratta se $u_{t-k} > 0$. Inoltre, la quota dell'incremento di h_t^2 dovuta all'aver osservato un valore negativo di u_{t-k} dipenderà non solo dal valore assoluto di quest'ultimo, ma anche dal valore di h_{t-k} . In altre parole, l'effetto su h_t^2 di uno shock negativo al tempo $(t-k)$ sarà tanto più elevato quanto maggiore è la variabilità dei rendimenti in quell'istante, misurata in termini di h_{t-k} .

Ricordando che $(u_t | I^{t-1}) \sim N(0, h_t^2)$, la funzione di log-verosimiglianza del modello può essere scritta come

$$\ell(u; \sigma_e^2, \mathbf{Q}) = -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log h_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{u_t^2}{h_t^2} \quad (4)$$

la quale può essere massimizzata rispetto ai parametri incogniti in $\{\sigma_e^2, \mathbf{Q}\}$ utilizzando l'algoritmo EM. In particolare, la procedura utilizzata per la

massimizzazione numerica della (4) si basa sull'adattamento di un algoritmo per la stima di massima verosimiglianza dei parametri di un modello state-space lineare e Gaussiano proposto da Shumway e Stoffer (1982) e successivamente modificato da Wu *et al.* (1996). Una valutazione asintotica degli errori standard associati alle stime può essere ottenuta calcolando analiticamente la matrice di informazione osservata in corrispondenza del punto di massimo della funzione di verosimiglianza. Tale matrice può essere ricavata utilizzando le equazioni ricorsive riportate in Harvey (1990).

Una generalizzazione immediata della (1), che consente di modellizzare simultaneamente sia la media che la varianza condizionata, è data dal seguente modello di regressione nel quale gli errori sono stati generati da un processo di tipo CPV-C:

$$\begin{aligned} y_t &= \mathbf{M}_t \mathbf{b} + u_t \\ u_t &\sim \text{CPV-C}(r, s) \end{aligned} \quad (5)$$

dove, per $t = 1, \dots, T$, \mathbf{M}_t è un vettore di regressori e \mathbf{b} è un vettore di parametri incogniti da stimare. Il termine di regressione $\mathbf{M}_t \mathbf{b}$ incluso nell'equazione (5) può coincidere con una struttura di tipo ARMA o anche includere variabili esplicative esogene. Rendendo il vettore dei coefficienti \mathbf{b}_t tempo variabile, inoltre, è possibile generalizzare ulteriormente la (5) fino a ricomprendere nel suo campo di applicazione alcuni particolari modelli non lineari per serie storiche, come recentemente mostrato in Amendola e Storti (2000) i quali considerano un modello di tipo TAR (Threshold AutoRegressive) (Tong, 1990) con errori CPV-C.

3. Un'applicazione ad alcune serie di rendimenti azionari

Al fine di mostrare le potenzialità applicative dell'approccio proposto, vengono qui presentati i risultati di un'applicazione alle serie dei valori giornalieri alla chiusura del mercato di alcuni noti indici sintetici dell'andamento del mercato azionario. In particolare gli indici considerati sono S&P 500, MIB30, DAX30, CAC40, IBEX35I e lo SWISS Market-Price Index rilevati dal 2.01.1998 al 3.10.2000 per un totale di 719 osservazio-

ni per ognuna delle serie considerate. La serie dei rendimenti relativa a ciascuno degli indici sopra menzionati è stata ottenuta calcolando la differenza prima della trasformata logaritmica dei dati originari. I risultati del test ARCH-LM di Engle, i quali vengono per brevità omessi, suggeriscono la presenza di eteroschedasticità condizionata in ciascuna delle serie considerate per l'analisi.

Il passo successivo è consistito nella stima di un modello GARCH(1,1) per la varianza condizionata:

$$h_t^2 = a_0 + a_1 u_{t-1}^2 + b_1 h_{t-1}^2 \quad (6)$$

(Bollerslev, 1986) con $a_i > 0$, $i=0,1$, e $b_1 > 0$. Le stime ottenute ed i relativi standard errors e statistiche t sono stati riportati in Tabella 1.

Al fine di verificare l'adeguatezza del semplice modello GARCH(1,1) e, in particolare, di investigare la presenza di effetti di *leverage* nella varianza condizionata, per ogni serie sono stati calcolati i residui standardizzati z_t ottenuti dividendo i dati originari per le corrispondenti *standard deviations* condizionate:

$$z_t = \frac{u_t}{h_t} \quad t = 1, \dots, T.$$

Si è quindi proceduto a stimare le cross-correlazioni incrociate fra z_t^2 e z_{t-k} , per $k=1,2,\dots,15$ (Figura 1). I valori teorici di tali cross-correlazioni dovrebbero risultare nulli in assenza di effetti di *leverage* e, viceversa, negativi in presenza di effetti di questo tipo. Come risalta dai grafici riportati in Figura 1, in tutti i casi il coefficiente di cross-correlazione stimato a lag 1 assume valori negativi e significativamente diversi da 0. Nel caso dello S&P 500, inoltre, anche il valore a lag 2 del coefficiente si presenta marcatamente negativo e significativamente diverso da 0. Tali considerazioni contribuiscono a motivare il ricorso ad un modello per la varianza condizionata che sia in grado di catturare gli effetti di *leverage* che una semplice struttura di tipo GARCH non riesce a catturare.

Per ciascuna serie si è quindi proceduto a stimare il modello (3) con ordini $r = s = 1$. Le stime ottenute sono state riportate in Tabella 1. I valori della statistica t mostrano come tutte le stime siano significativamente diverse da zero. In particolare, le stime ottenute per il parametro $\gamma_{1,1}$ confermano la presenza di effetti asimmetrici nella varianza condizionata di

Tabella 1. GARCH(1,1): stime di massima verosimiglianza, statistiche t e relativi standard errors asintotici per S&P 500, MIB30, DAX30, CAC40, SWISS, IBEX.

Serie	parametro	stima	t-stat.	s.e.
S&P500	a_0	5.26×10^{-6}	2.413	2.18×10^{-6}
	a_1	0.078	4.571	0.017
	b_1	0.889	32.185	0.028
MIB30	a_0	5.57×10^{-6}	2.168	2.57×10^{-6}
	a_1	0.115	4.864	0.024
	b_1	0.865	36.681	0.024
DAX30	a_0	4.79×10^{-6}	2.156	2.22×10^{-6}
	a_1	0.065	4.185	0.016
	b_1	0.914	43.979	0.021
CAC40	a_0	3.80×10^{-6}	2.133	1.78×10^{-6}
	a_1	0.048	4.238	0.011
	b_1	0.933	62.382	0.015
SWISS	a_0	3.29×10^{-6}	2.942	1.12×10^{-6}
	a_1	0.079	4.187	0.019
	b_1	0.899	40.437	0.022
IBEX35I	a_0	7.68×10^{-6}	2.459	3.12×10^{-6}
	a_1	0.085	5.285	0.016
	b_1	0.880	35.089	0.025

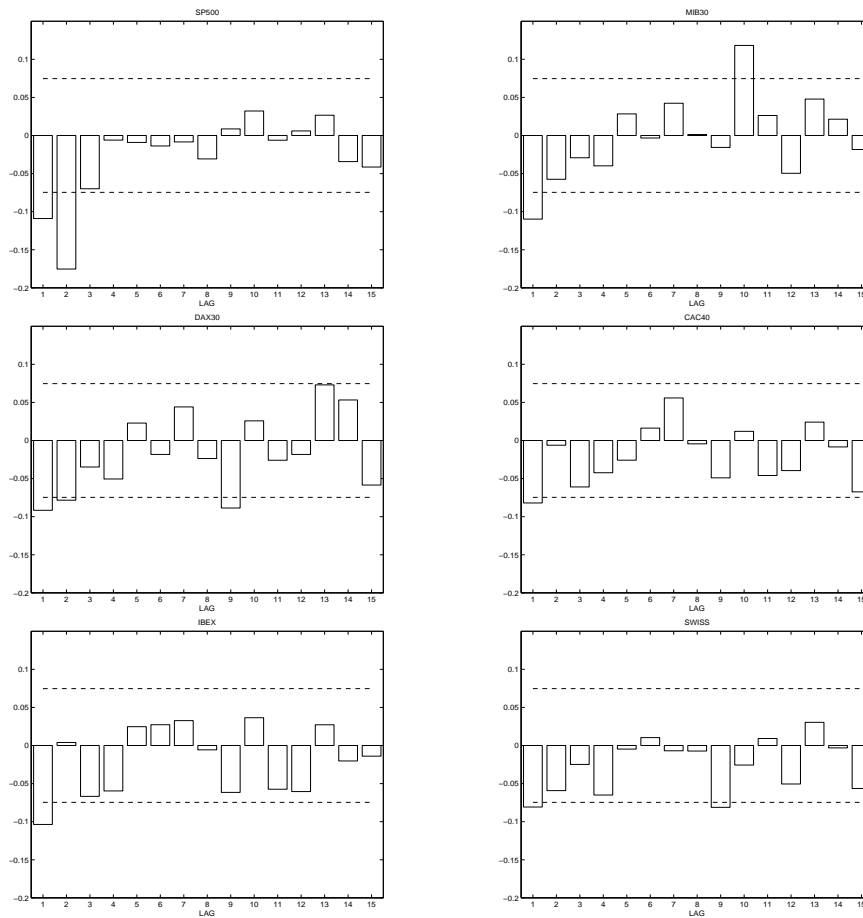


Figura 1. Cross-correlazioni stimate fra z_t^2 e z_{t-k} per S&P 500, MIB30, DAX30, CAC40, SWISS, IBEX per $k=1, \dots, 15$.

Tabella 2. CPV-C(1,1): stime di massima verosimiglianza, statistiche t e relativi standard errors asintotici per S&P 500, MIB30, DAX30, CAC40, SWISS, IBEX.

Serie	parametro	stima	t-stat.	s.e.
S&P500	σ_e^2	1.85×10^{-5}	3.718	4.99×10^{-6}
	α_1	0.065	2.571	0.025
	$\gamma_{1,1}$	-0.125	-5.519	0.023
	β_1	0.815	16.509	0.049
MIB30	σ_e^2	4.16×10^{-5}	3.327	1.25×10^{-5}
	α_1	0.098	3.022	0.032
	$\gamma_{1,1}$	-0.094	-4.076	0.023
	β_1	0.739	10.429	0.071
DAX30	σ_e^2	4.76×10^{-5}	3.777	1.26×10^{-5}
	α_1	0.080	2.694	0.030
	$\gamma_{1,1}$	-0.121	-4.983	0.024
	β_1	0.724	10.565	0.069
CAC40	σ_e^2	3.63×10^{-5}	2.670	1.36×10^{-5}
	α_1	0.074	2.356	0.031
	$\gamma_{1,1}$	-0.074	-3.277	0.022
	β_1	0.742	8.382	0.089
SWISS	σ_e^2	2.96×10^{-5}	3.323	8.91×10^{-6}
	α_1	0.139	3.205	0.043
	$\gamma_{1,1}$	-0.086	-3.492	0.025
	β_1	0.667	7.506	0.089
IBEX35I	σ_e^2	4.91×10^{-5}	3.966	1.24×10^{-5}
	α_1	0.121	3.286	0.037
	$\gamma_{1,1}$	-0.129	-4.726	0.027
	β_1	0.668	9.016	0.074

tutte le serie analizzate. In tutti i casi, infatti, si registrano valori stimati del parametro statisticamente significativi e negativi. I valori più bassi vengono registrati per S&P500, DAX30 e IBEX anche se l'effetto di *leverage* appare sostanziale in tutte le serie.

Quanto detto può essere evidenziato sul piano grafico rappresentando le *news impact curves* relative ai modelli stimati. Le curve rappresentate in Figura 2 sono state generate dalla seguente equazione:

$$\hat{h}_t^2 = \hat{\sigma}_e^2 + \hat{\alpha}_1 u_{t-1}^2 + \hat{\beta}_1 m h_{t-1}^2 + 2\hat{\gamma}_{1,1} u_{t-1} m h_{t-1}$$

dove $\{\hat{\sigma}_e^2, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\gamma}_{1,1}\}$ sono le stime ottenute per i parametri del modello e $m h_{t-1}^2 = \text{median}(h_t^2)$ è la mediana della serie delle varianze condizionate generata sulla base del particolare modello CPV-C(1,1) che ne risulta. La curva viene quindi calcolata per diversi valori di u_t in un intervallo centrato intorno allo zero che in questo caso si è posto pari a $[-0.05, 0.05]$. In caso di modelli caratterizzati dalla presenza di effetti di *leverage* le curve tendono ad assumere un andamento asimmetrico dovuto al fatto che i valori della varianza condizionata ottenuti in corrispondenza di rendimenti negativi sono maggiori di quelli ottenuti in corrispondenza di rendimenti positivi di pari magnitudine. In caso di assenza di effetti di questo tipo (come nel caso di un modello GARCH), invece, la curva assume un andamento simmetrico rispetto allo zero. È immediato notare come per tutte le serie qui prese in considerazione le *news impact curves* stimate mostrino un caratteristico andamento asimmetrico.

4. Conclusioni

Nel presente lavoro si è mostrato come una particolare classe di modelli autoregressivi con coefficienti stocastici possa essere impiegata per la stima di effetti asimmetrici nella varianza condizionata di serie storiche finanziarie.

Va sottolineato che i risultati qui presentati hanno carattere preliminare. Fra i possibili sviluppi delle ricerche attualmente in corso si prenderà senz'altro in considerazione la definizione formale di un test per la verifica dell'ipotesi di asimmetria. Particolare rilievo assume inoltre lo studio

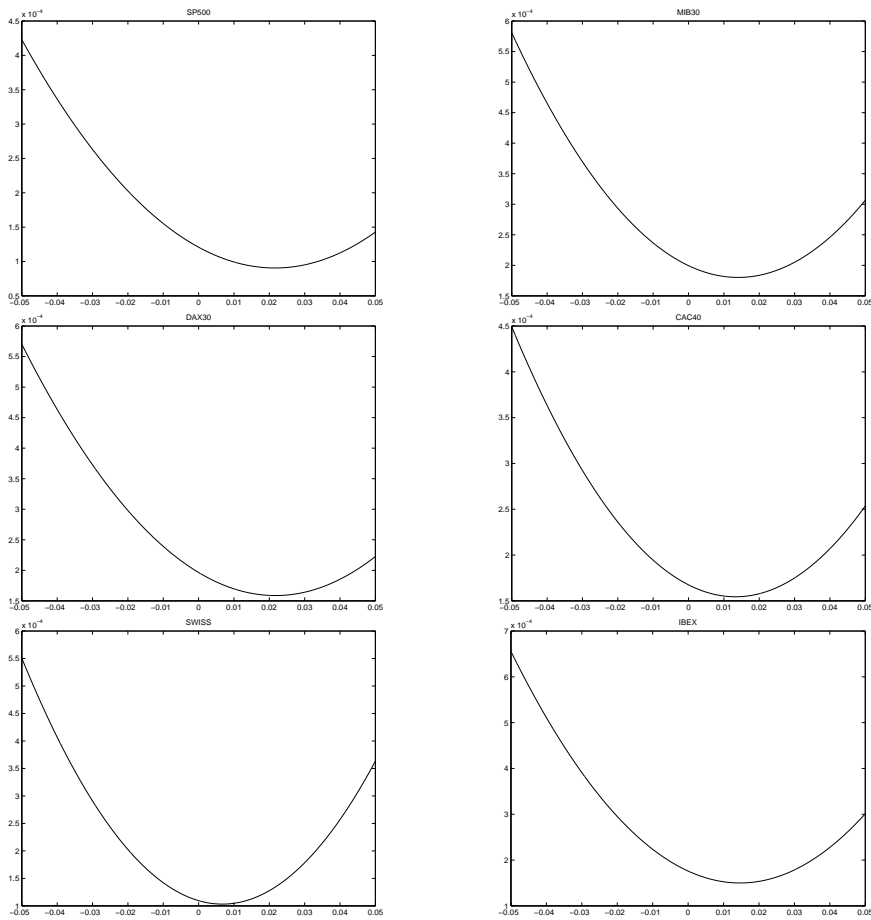


Figura 2. News Impact Curves stimate per S&P 500, MIB30, DAX30, CAC40,SWISS, IBEX.

delle proprietà statistiche del modello proposto con riferimento alla individuazione di regioni dello spazio parametrico in cui date proprietà, come ad esempio la stazionarietà, siano rispettate.

Ringraziamenti: Il presente lavoro è stato parzialmente finanziato dal progetto MURST 2000 “Modelli Stocastici e Metodi di Simulazione per l’Analisi di Dati Dipendenti”.

Riferimenti bibliografici

Amendola A., Storti G. (2000) A Non-Linear Time Series Approach to Modelling Asymmetry in Stock Market Indexes, Working Paper 3.93, *Dipartimento di Scienze Economiche, Università degli Studi di Salerno*.

Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

Harvey A. C. (1990) *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press.

Nelson, D. (1991) Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach, *Econometrica*, 59, 347-370.

Rabemananjara, R., Zakoian, J. M. (1993) Threshold ARCH Models and Asymmetries in Volatility, *Journal of Applied Econometrics*, 8, 31-49.

Shumway R. H., Stoffer D. S. (1982) An Approach to Time Series Smoothing and Forecasting Using the EM Algorithm, *Journal of Time Series Analysis*, 3, 253-264.

Storti, G. (1999) A State Space Framework for Forecasting Non-Stationary Economic Time Series, *Quaderni di Statistica*, 1, 121-142.

Tong H. (1990) *Non-Linear Time Series: A Dynamical Systems Approach*, Oxford University Press.

Tsay, R. (1987) Conditional Heteroscedastic Time Series Models, *Journal of the American Statistical Association*, 82, 590-604.

Wu L. S., Pai J. S., Hosking J. R. M. (1996) An Algorithm for Estimating Parameters of State Space Models, *Statistics and Probability Letters*, 28, 99-106.