

L'andamento della *hazard function* nel modello di Dagum a tre parametri

Filippo Domma

Dipartimento di Economia e Statistica, Università della Calabria.
E-mail: f.domma@unical.it

Summary: In this paper, we analyse the behaviour of the hazard function in the Dagum distribution with three parameters. We show that the hazard function is monotone decreasing or upside-down bathtub or bathtub and upside-down bathtub.

Keywords: Dagum Distribution, Hazard Function, Bathtub and Upside-Down Bathtub Shaped.

1. Introduzione

In diversi campi di applicazione (biomedico, ingegneristico, economico-sociale, demografico, ecc.) l'interesse principale della ricerca è riposto sul tempo necessario affinché l'evento di interesse si realizzi. Negli studi economico-sociali è cruciale, ad esempio, avere informazioni sul tempo necessario affinché un disoccupato trovi lavoro; in ambito ingegneristico, al fine di valutare l'affidabilità di un prodotto, è necessario sapere il tempo di funzionamento del prodotto stesso.

Gli studi statistici che affrontano tali problemi vengono classificati a seconda del campo di applicazione, infatti si parla di *survival analysis*, *lifetime data*, *failure time data*, *reliability analysis*, ecc. . In questo lavoro i modelli utilizzati nei diversi contesti suddetti verranno denominati modelli di durata.

Si ipotizzerà che la variabile casuale (v.c) T , interprete del tempo necessario affinché l'evento di interesse si realizzi, sia continua e positiva; consideriamo, inoltre, la v.c. in assenza di fattori sistematici che possano influenzare la distribuzione di T (popolazioni omogenee).

Nell'ambito dei dati di durata un ruolo cruciale è svolto dalla cosiddetta *hazard function* (o *failure rate*) la quale, utilizzando la terminologia diffusa nella *survival analysis*, fornisce indicazioni sul tasso istantaneo di morte al tempo t , dato che l'individuo è sopravvissuto fino a t . Oltre all'interesse sull'interpretazione analitica che tale funzione fornisce, si evidenzia il ruolo che svolge nella scelta della funzione di densità della v.c. T . Infatti, informazioni empiriche e/o valutazioni qualitative sul fenomeno in esame possono essere utilizzate per specificare la *hazard function* e, successivamente, per mezzo dell'equivalenza matematica con la funzione di densità possiamo individuare la famiglia di distribuzione.

Al fine di utilizzare il modello di Dagum, usualmente impiegato per l'analisi della distribuzione del reddito, per interpretare e spiegare i dati di durata, in questo lavoro preliminarmente si studia il comportamento della *hazard function* al variare di t e dei parametri che specificano tale modello.

Nel paragrafo 2 vengono riportati i concetti di base dei modelli di durata e il teorema di Glaser. Nel terzo paragrafo dopo aver introdotto brevemente il modello di Dagum si propone un teorema che sintetizza il comportamento della *hazard function* del modello in esame.

2. I modelli di durata ed il Teorema di Glaser

Sia T una v.c. continua e positiva, con determinazioni nell'intervallo $[0, \infty)$, interprete del tempo necessario affinché l'evento di interesse si realizzi (da qui in poi durata), con funzione di densità (f.d.) $f(t; \mathbf{q})$, con $\mathbf{q} \in \Theta \subset \mathcal{R}^r$, e funzione di ripartizione (f.r.) $F(t; \mathbf{q})$. Indichiamo, inoltre, con $S(t; \mathbf{q})$ la funzione di sopravvivenza (f.s.). La *hazard function* definita dalla seguente

$$h(t; \mathbf{q}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_r \{t \leq T < t + \Delta t / T \geq t\}}{\Delta t} = \frac{f(t; \mathbf{q})}{S(t; \mathbf{q})} \quad (2.1)$$

indica il tasso istantaneo che l'evento si verifichi nell'intervallo $[t, t + \Delta t)$ dato che lo stesso non si è verificato fino a t . Si evidenzia che nel caso continuo la (2.1) non è una densità, infatti si dimostra [Kalbfleisch e Prentice (1980), pag.7; Lawless (1982), pag.9] che

$h(t; \mathbf{q}) \geq 0$ e $\int_0^{\infty} h(t; \mathbf{q}) dt = \infty$. La relazione matematica esistente tra la f.d. e la h.f. è la seguente

$$f(t; \mathbf{q}) = h(t; \mathbf{q}) \times \exp \left\{ - \int_0^t h(u; \mathbf{q}) du \right\} \quad (2.2)$$

[Lawless (1982), pag.9]. Da quest'ultima si evince che possiamo risalire alla f.d. una volta specificata la *hazard function*. Così, ad esempio, se per un determinato fenomeno è noto, da informazioni empiriche e/o valutazioni qualitative, che $h(t; \mathbf{q})$ ha un andamento sempre crescente (decrescente) allora o si specifica una h.f. sempre crescente (decrescente) e, successivamente, tramite la (2.2) si individua la f.d. della v.c. T , oppure si sceglie un modello parametrico che presenta una h.f. sempre crescente (decrescente).

In letteratura usualmente si indicano con IFR, DFR, BT e UBT, rispettivamente, *hazard function* strettamente crescenti (*increasing failure rate*), strettamente decrescenti (*decreasing failure rate*), con un minimo (*Bathtub*) e con un massimo (*upside-down bathtub*).

Dato un modello parametrico, la valutazione dell'andamento della *hazard function* al variare di t e di \mathbf{q} dipende, ovviamente, dalla complessità della funzione $h(t; \mathbf{q})$. Di seguito riportiamo la cosiddetta procedura di Glaser (1980), basata sul reciproco di $h(t; \mathbf{q})$, la quale rappresenta un'alternativa alla valutazione diretta di detta funzione.

Assumendo che la f.d. sia strettamente positiva e due volte differenziabile in $(0, \infty)$, posto

$$g(t; \mathbf{q}) = [h(t; \mathbf{q})]^{-1} \quad \text{e} \quad \eta(t; \mathbf{q}) = \frac{-f'(t; \mathbf{q})}{f(t; \mathbf{q})}$$

dove l'apice indica la derivata parziale rispetto a t , si dimostra [Glaser, 1980], il seguente

$$\mathbf{Lemma\ 2.1.} \quad g'(t; \mathbf{q}) = \int_t^{\infty} \frac{f(y; \mathbf{q})}{f(t; \mathbf{q})} [\eta(t; \mathbf{q}) - \eta(y; \mathbf{q})] dy.$$

Inoltre, sulla base di quest'ultimo si ha:

Teorema 2.1. (Glaser, 1980).

a) se $\eta'(t; \dot{\epsilon}) > 0 \quad \forall t > 0$, allora $h(t; \mathbf{q})$ è IFR;

b) se $\eta'(t; \dot{\epsilon}) < 0 \quad \forall t > 0$, allora $h(t; \mathbf{q})$ è DFR;

c) supposto che $\exists t_0 > 0$ tale che

$$\eta'(t; \dot{\epsilon}) < 0 \quad \forall t \in (0, t_0), \quad \eta'(t_0; \dot{\epsilon}) = 0, \quad \eta'(t; \dot{\epsilon}) > 0 \quad \forall t > t_0 \quad (2.3)$$

i) se $\exists y_0 > 0$ tale che $g'(y_0; \dot{\epsilon}) = 0$, allora $h(t; \mathbf{q})$ è BT;

ii) se $\exists y_0 > 0$ tale che $g'(y_0; \dot{\epsilon}) = 0$, allora $h(t; \mathbf{q})$ è IFR;

d) supposto che $\exists t_0 > 0$ tale che

$$\eta'(t; \dot{\epsilon}) > 0 \quad \forall t \in (0, t_0), \quad \eta'(t_0; \dot{\epsilon}) = 0, \quad \eta'(t; \dot{\epsilon}) < 0 \quad \forall t > t_0 \quad (2.4)$$

i) se $\exists y_0 > 0$ tale che $g'(y_0; \dot{\epsilon}) = 0$, allora $h(t; \mathbf{q})$ è UBT;

ii) se $\exists y_0 > 0$ tale che $g'(y_0; \dot{\epsilon}) = 0$, allora $h(t; \mathbf{q})$ è DFR.

E' evidente che l'utilità del Teorema 2.1. deriva dalla trattabilità di $\eta'(t; \dot{\epsilon})$; inoltre, per i punti c) e d) in cui è necessario valutare l'esistenza di un $y_0 > 0$ tale che $g(y_0; \mathbf{q}) = 0$, Glaser (1980) suggerisce di studiare il comportamento di $g(t; \mathbf{q})$ oppure di $g(t; \dot{\epsilon}) \times \eta(t; \dot{\epsilon})$ in prossimità dello zero. Le conclusioni del suo ragionamento sono sintetizzate nel seguente

Lemma 2.2.

Supposto che la (2.3) oppure la (2.4) siano soddisfatte.

a) Posto che $\varepsilon_1 = \lim_{t \rightarrow 0} f(t; \dot{\epsilon})$ esiste

i) se $\varepsilon_1 = \infty$ e (2.3) è vera, allora $h(t; \mathbf{q})$ è BT;

ii) se $\varepsilon_1 = 0$ e (2.3) è vera, allora $h(t; \mathbf{q})$ è IFR;

iii) se $\varepsilon_1 = 0$ e (2.4) è vera, allora $h(t; \mathbf{q})$ è UBT;

iv) se $\varepsilon_1 = \infty$ e (2.4) è vera, allora $h(t; \mathbf{q})$ è DFR.

b) Posto che $\varepsilon_2 = \lim_{t \rightarrow 0} g(t; \dot{\epsilon}) \times \eta(t; \dot{\epsilon})$ esiste

- i) se $\varepsilon_2 > 1$ e (2.3) è vera, allora $h(t; \mathbf{q})$ è BT;
- ii) se $\varepsilon_2 < 1$ e (2.3) è vera, allora $h(t; \mathbf{q})$ è IFR;
- iii) se $\varepsilon_2 < 1$ e (2.4) è vera, allora $h(t; \mathbf{q})$ è UBT;
- iv) se $\varepsilon_2 > 1$ e (2.4) è vera, allora $h(t; \mathbf{q})$ è DFR.

La procedura di Glaser (1980) verrà utilizzata per studiare l'andamento della *hazard function* relativa al modello di Dagum al variare di t in $(0, \infty)$.

3. L'andamento della hazard function nel modello di Dagum

Supponiamo che la f.d. della v.c. T continua e positiva appartenga alla famiglia di distribuzioni di Dagum (1977, 1980) a tre parametri, con generico elemento dato da:

$$f(t; \mathbf{\vartheta}) = \beta \lambda \delta t^{-\delta-1} (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta-1} \quad (3.1)$$

con $\mathbf{q}' = (\beta, \lambda, \delta)$ e $\beta > 0$, $\lambda > 0$ e $\delta > 0$, e funzione di sopravvivenza

$$S(t; \mathbf{\vartheta}) = 1 - (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta}. \quad (3.2)$$

Si ricorda che la (3.1) è asimmetrica positiva, è unimodale per $\beta\delta > 1$ ed è zero-modale per $\beta\delta \leq 1$. Da qui in poi tale v.c. verrà indicata con $Da(\beta, \lambda, \delta)$. La *hazard function* della v.c. in esame è:

$$h(t; \mathbf{\vartheta}) = \frac{\beta \lambda \delta t^{-\delta-1} (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta-1}}{1 - (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta}}. \quad (3.3)$$

Si può verificare che le prime due derivate rispetto a t presentano una forma particolarmente complessa quindi, al fine di valutare il comportamento della (3.3), utilizziamo la procedura di Glaser (1980) esposta nel paragrafo precedente.

Nel contesto in esame il reciproco della *hazard function* è

$$g(t; \mathbf{\vartheta}) = \frac{1 - (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta}}{\beta \lambda \delta t^{-\delta-1} (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta-1}}.$$

Inoltre, la funzione $\eta(t; \mathbf{\vartheta})$, dopo qualche semplice passaggio analitico, risulta essere

$$\eta(t; \epsilon) = \frac{(\delta + 1)t^\delta - \lambda(\beta\delta - 1)}{t(t^\delta + \lambda)}. \quad (3.4)$$

Infine, la derivata prima rispetto a t della (3.4), dopo opportune semplificazioni, è data da:

$$\eta'(t; \epsilon) = \frac{-(\delta + 1)t^{2\delta} + \lambda(\delta + 1)[\delta(\beta + 1) - 2]t^\delta + \lambda^2(\beta\delta - 1)}{t^2(t^\delta + \lambda)^2}. \quad (3.5)$$

Per il prosieguo risulterà utile il seguente

Lemma 3.1.

Dato che il parametro \mathbf{d} è maggiore di zero, la quantità

$$r = \frac{4(\beta\delta - 1)}{(\delta + 1)[\delta(\beta + 1) - 2]^2} \quad \text{è:}$$

i) *maggiore di zero* $\forall (\beta, \delta)$ se $\mathbf{bd} > 1$;

ii) *uguale a zero* $\forall (\beta, \delta)$ se $\mathbf{bd} = 1$;

iii) *compresa nell'intervallo $[-1, 0)$*

a) $\forall \beta \in (\beta_2, \bar{\beta})$ e $\forall \delta \in (0, 3)$;

oppure

b) $\forall \beta \in (0, \bar{\beta})$ e $\forall \delta > 3$;

dove $\bar{\beta} = \frac{1}{\delta}$ e $\beta_2 = \frac{3 - \delta}{\delta + 1}$ con $\mathbf{d} > 0$.

Dimostrazione

I punti i) ed ii) sono immediati.

Al fine di dimostrare il punto iii) si osservi, innanzitutto, che $r < 0$ se e solo se $\beta\delta < 1$. Inoltre,

$$r \geq -1 \Leftrightarrow (\delta + 1)[\delta(\beta + 1) - 2]^2 \geq 4 - 4\beta\delta.$$

Ovvero, per δ fissato, dopo qualche semplice calcolo si può scrivere che $r \geq -1$ se e solo se

$$\delta^2(\delta + 1)\beta^2 + 2\delta^2(\delta - 1)\beta + (\delta + 1)(\delta - 2)^2 - 4 \geq 0. \quad (3.6)$$

La parabola in β , espressa nella (3.6), presenta un discriminante strettamente positivo ($\Delta = 16\delta^4$) e, quindi, ammette le seguenti due radici

$$\beta_1 = -1 \quad \text{e} \quad \beta_2 = \frac{3-\delta}{\delta+1}.$$

Evidentemente, $\beta_2 > 0$ per $\delta < 3$; inoltre, è immediato verificare che $\beta_2 < \bar{\beta}$, per ogni $\delta > 0$.

Ricordando che siamo interessati solo a valori positivi di β , e che detta parabola ha concavità verso l'alto, possiamo concludere che:

- a) $r \geq -1$ se $\delta \in (0,3]$ e $\beta > \beta_2$. D'altra parte, la scelta di β , $\forall \delta \in (0,3]$, deve essere tale da soddisfare il vincolo $\beta\delta < 1$, di conseguenza β dovrà essere minore di $\bar{\beta} = \frac{1}{\delta}$.
- b) $r \geq -1$ se $\delta > 3$ e $\beta > 0$. Ragionamenti analoghi al punto precedente, ci inducono a dire che, $\forall \delta > 3$, β deve appartenere all'intervallo $(0, \bar{\beta})$.

Il comportamento della *hazard function* di una v.c. $Da(\beta, \lambda, \delta)$, al variare di t e di \mathbf{q} , è sintetizzato dal seguente

Teorema 3.1.

Posto $\beta^* = \frac{2}{\delta} - 1$ e $\bar{\beta} = \frac{1}{\delta}$, la *hazard function* di una $Da(\mathbf{b}, \mathbf{l}, \mathbf{d})$ è

UBT se:

- i) $\mathbf{bd} > 1$ e $\beta \neq \beta^*$;
 - ii) $\mathbf{bd} = 1$, $\mathbf{b} > \mathbf{b}^*$ e $\mathbf{d} > 1$.
- E' DFR se:*
- iii) $\mathbf{b} = \mathbf{b}^*$ e $\mathbf{d} < 2$;
 - iv) $\beta\delta = 1$, $\mathbf{b} < \mathbf{b}^*$ e $\mathbf{d} < 1$;
 - v) $\mathbf{d} < 1$ e $\beta \in (\beta_2, \bar{\beta})$.

Infine, presenta un minimo ed un massimo se:

- vi) $\delta \in (1,3)$ e $\beta \in (\beta_2, \bar{\beta})$;
- vii) $\delta \geq 3$ e $\beta \in (0, \bar{\beta})$.

Dimostrazione

Dalla (3.5) $\eta'(t; \mathbf{q}) = 0 \Leftrightarrow$

$$-(\delta+1)t^{2\delta} + \lambda(\delta+1)[\delta(\beta+1) - 2]t^\delta + \lambda^2(\beta\delta - 1) = 0.$$

Posto $a = (\delta + 1)$, $b = \lambda(\delta + 1)[\delta(\beta + 1) - 2]$, $c = \lambda^2(\beta\delta - 1)$ e $y = t^\delta$, si ha:

$$\eta'(t; \mathbf{q}) = 0 \Leftrightarrow -ay^2 + by + c = 0 \quad (3.7)$$

Il discriminante di quest'ultima è:

$$\Delta^* = \lambda^2(\delta + 1)^2[\delta(\beta + 1) - 2]^2\{1 + r\} \quad (3.8)$$

dove r è la quantità definita nel Lemma 3.1.

Dalla (3.8), $\Delta^* \geq 0 \Leftrightarrow r \geq -1$. Ovvero se le condizioni del Lemma 3.1 sono soddisfatte esistono le seguenti due radici della (3.7)

$$y_1 = \frac{\lambda}{2}[\delta(\beta + 1) - 2]\{1 - \sqrt{1 + r}\} \quad (3.9)$$

$$y_2 = \frac{\lambda}{2}[\delta(\beta + 1) - 2]\{1 + \sqrt{1 + r}\} \quad (3.10)$$

Al fine di valutare il segno delle radici si osservi, ad esempio, che

$$y_1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta(\beta + 1) - 2 > 0 \\ 1 - \sqrt{1 + r} \geq 0 \end{cases} \text{ oppure } \Leftrightarrow \begin{cases} \delta(\beta + 1) - 2 < 0 \\ 1 - \sqrt{1 + r} \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{cioè } \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > \frac{2}{\delta} - 1 = \beta^* \\ r \in [-1, 0) \end{cases} \text{ oppure } \Leftrightarrow \begin{cases} \beta < \beta^* \\ r > 0 \end{cases} .$$

Ragionamenti analoghi valgono per le altre situazioni le quali possono essere sintetizzate nella seguente Tabella

	$r \in [-1, 0)$	$r = 0$	$r > 0$
$\beta > \beta^*$	$y_1 > 0$ $y_2 > 0$	$y_1 = 0$ $y_2 > 0$	$y_1 < 0$ $y_2 > 0$
$\beta = \beta^*$	$y_1 = 0$ $y_2 = 0$	$y_1 = 0$ $y_2 = 0$	$y_1 = 0$ $y_2 = 0$
$\beta < \beta^*$	$y_1 < 0$ $y_2 < 0$	$y_1 = 0$ $y_2 < 0$	$y_1 > 0$ $y_2 < 0$

Per ciò che segue è importante ricordare che la (3.7) è una parabola rivolta verso il basso e, quindi, nel caso di due radici distinte detta parabola è maggiore di zero $\forall y \in (y_1, y_2)$. Inoltre, è semplice verificare che: se $\delta \leq 1$ allora $\beta^* \geq \bar{\beta}$, mentre se $\delta > 1$ allora $\beta^* < \beta_2$.

i) Se $\beta\delta > 1$ allora per il Lemma 3.1 (i) $r > 0$; inoltre, per $\beta > \beta^*$ esistono $y_1 < 0$ e $y_2 > 0$ tale $\forall y \in (y_1, y_2)$ la (3.7) è maggiore di zero. Di conseguenza, \exists un $t_0 = (y_2)^{\frac{1}{\delta}} > 0$ che soddisfa la (2.4) del Teorema 2.1 (d). Infine, poiché per ipotesi $\beta\delta > 1$, si ha $\varepsilon_1 = \lim_{t \rightarrow 0} f(t; \mathbf{q}) = 0$, di conseguenza per il Lemma 2.2 (a)- iii), $h(t; \mathbf{q})$ è UBT. Ragionamenti analoghi valgono nel caso in cui $\beta < \beta^*$. Si osservi che in quest'ultimo caso δ deve essere minore di 2 affinché β^* sia maggiore di zero.

ii) Se $\beta\delta = 1$ allora per il Lemma 3.1 (ii) $r = 0$; inoltre per $\beta > \beta^*$ esistono $y_1 = 0$ e $y_2 > 0$ tali che $\forall y \in (0, y_2)$, la (3.7) è maggiore di zero. Quindi, esiste un $t_0 = (y_2)^{\frac{1}{\delta}}$ che soddisfa la (2.4) del Teorema 2.1 (d). Osservato che per $\delta > 1$,

$$\varepsilon_2 = \lim_{t \rightarrow 0} g(t; \mathfrak{e}) \times \eta(t; \mathfrak{e}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta}}{\lambda t^{-\delta-1} (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta-1}} \frac{(1 + \delta)}{(t + \lambda t^{1-\delta})} = 0,$$

si può concludere che per il Lemma 2.2 (b)-(iii), $h(t; \mathbf{q})$ è UBT;

iii) se $\beta = \beta^*$ esistono due radici coincidenti $y_1 = y_2 = 0$ e, quindi, la (3.7) è sempre negativa. Per il Teorema 2.1 (b), $h(t; \mathbf{q})$ è DFR. Si osservi che per $\delta \geq 2$, β^* è negativo, di conseguenza δ deve essere minore di 2 affinché β sia positivo;

iv) Per il Lemma 3.1. (ii) $r = 0 \Leftrightarrow \beta\delta = 1$, inoltre per $\beta < \beta^*$ \exists no $y_1 = 0$ e $y_2 < 0$ tali che $\forall y \in (y_2, 0)$, la (3.7) è maggiore di zero, poiché siamo interessati solo alle radici positive, possiamo concludere che $\forall t > t_0 = (y_1)^{\frac{1}{\delta}} = 0$, $\eta'(t; \mathfrak{e}) < 0$ e, quindi, per il Teorema 2.1 (b), $h(t; \mathbf{q})$ è DFR. Si evidenzia che se $\delta \geq 1$, β non può soddisfare contemporaneamente il doppio vincolo $\beta < \beta^*$ e $\beta\delta = 1$;

- v) Se $\delta < 1$ e $\beta \in (\beta_2, \bar{\beta})$, per il Lemma 3.1 *iii)-a)*, $r \in [-1, 0)$; inoltre, per $\delta < 1$, $\beta^* > \bar{\beta}$ e, quindi, ogni $\beta \in (\beta_2, \bar{\beta})$ soddisfa il vincolo $\beta < \beta^*$. Quest'ultimo, dato che $r \in [-1, 0)$, assicura che le due radici della (3.7) sono negative di conseguenza $\forall t > 0$, $\eta'(t; \delta) < 0$ e, per il Teorema 2.1 *(b)*, $h(t; \mathbf{q})$ è DFR.
- vi) Per il Lemma 3.1 *iii)-a)* $r \in [-1, 0)$, inoltre, per $\beta > \beta^*$ la (3.7) presenta due radici distinte e positive tali che $\forall y \in (y_1, y_2)$ è maggiore di zero. Ciò significa che esistono $t_1 = (y_1)^{\frac{1}{\delta}}$ e $t_2 = (y_2)^{\frac{1}{\delta}}$ tali che $\eta'(t; \delta) < 0 \forall t < t_1$, $\eta'(t_1; \delta) = 0$, $\eta'(t; \delta) > 0 \forall t \in (t_1, t_2)$, $\eta'(t_2; \delta) = 0$ e $\eta'(t; \delta) < 0 \forall t > t_2$. Infine, poiché nelle condizioni in esame

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t; \delta) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t; \delta) = 0$$

possiamo concludere affermando che $h(t; \mathbf{q})$ presenta un minimo ed un massimo. Ragionamenti analoghi valgono per il punto *vii)*.

Le figure che seguono sintetizzano alcuni casi particolari del teorema proposto. In particolare la Figura 1 descrive alcune situazioni tali per cui la *hazard function* relativa al modello di Dagum presenta un andamento UBT, l'andamento IFR è descritto nella Figura 2 ed, infine, la Figura 3 rappresenta alcuni casi di *hazard* con un minimo ed un massimo (BT-UBT).

4. Conclusioni

Il teorema proposto nel presente lavoro evidenzia che il modello di Dagum a tre parametri può essere utilizzato per quei fenomeni che presentano una *hazard function* o monotono decrescente o con un massimo oppure con la contemporanea presenza di un minimo ed un massimo. Quest'ultima situazione sembra essere un caso peculiare del modello esaminato.

Figura 1. Hazard function con andamento UBT.

Figura 2. Hazard function decrescente.

Figura 3. Hazard function con andamento UBT-BT.

Ringraziamenti: Lavoro svolto nell'ambito del progetto di ricerca *Modelli di Durata: Sviluppi Metodologici ed Applicazioni a Fenomeni Economico-Sociali*. (PRIN 2001).

Riferimenti Bibliografici

Dagum C. (1977) A new model of personal income distribution: specification and estimation, *Economie Appliquée*, XXX, 3, 413-437.

Dagum C. (1980) The generation and distribution of income, the Lorenz curve and the Gini ratio, *Economie Appliquée*, XXXIII, 2, 327-367

Glaser R.E. (1980) Bathtub and related failure rate characterizations, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 75, n. 371, 667-672

Kalbfleisch J.D., Prentice R.L. (1980) *The statistical analysis of failure time data*, J. Wiley & Sons, New York

Lawless J.F. (1982) *Statistical models and methods for lifetime data*, J. Wiley & Sons, New York