

Asimmetrie puntuali e trasformazioni monotone

Filippo Domma

Dipartimento di Economia e Statistica, Università della Calabria
E-mail: f.domma@unical.it.

Summary: In this paper we show that the relative punctual asymmetries are partially ordered if and only if there exist a monotone relation between the involved random variables. Furthermore by an application of our main result, we introduce the log-Dagum distribution with three parameters.

Keywords: Relative Punctual Asymmetries, Monotone Transformation, Partial Ordering

1. Introduzione

Nella valutazione della forma di una distribuzione un ruolo importante riveste la simmetria o asimmetria della stessa. Diversi autori hanno recentemente evidenziato l'inaffidabilità di alcuni indicatori classici del verso dell'asimmetria in quanto non soddisferebbero alcune delle proprietà, tra le quali ricordiamo l'ordinamento parziale, ritenute essenziali affinché un indice possa essere utilizzato per la valutazione del verso dell'asimmetria di una distribuzione. Gli stessi autori sono concordi nel suggerire l'utilizzazione delle asimmetrie puntuali relative per la costruzione degli indici suddetti. Per maggiori dettagli si rinvia alla monografia di Brentari (1990).

In questa nota si propone una estensione di un teorema che collega l'ordinamento parziale convesso di van Zwet (1964) e le asimmetrie puntuali relative. In particolare, tale teorema, riportato in Brentari (1990), stabilisce che se tra due funzioni di ripartizione è soddisfatto l'ordinamento convesso allora le corrispondenti asimmetrie puntuali relative sono ordinate. Nel presente lavoro, sfruttando un noto teorema sulle funzioni convesse in un intervallo, si dimostra che se le asimmetrie puntuali relative di due variabili casuali sono ordinate allora tra dette variabili sussiste una relazione monotona.

Nel secondo paragrafo si introducono la simbologia, le definizioni essenziali e alcuni risultati preliminari; nel terzo si propone il teorema suddetto; infine, nel quarto paragrafo, si riportano alcuni esempi di applicazioni del teorema e si introduce la distribuzione Log-Dagum a tre parametri.

2. Definizioni e risultati preliminari

Prima di introdurre la simbologia, riportiamo la definizione di funzione convessa in un intervallo ed un teorema su dette funzioni che utilizzeremo nel paragrafo successivo.

Definizione 1

Una funzione $g(x)$ è convessa in un intervallo I se $\forall x, y \in I$ e $\forall t \in [0,1]$ si ha:

$$g[tx + (1-t)y] \leq tg(x) + (1-t)g(y).$$

Teorema 1

Una funzione $g(x)$, definita in un intervallo I , è convessa se e solo se $\forall x, y, z \in I$ con $x < y < z$, si ha:

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} \leq \frac{g(z) - g(x)}{z - x} \leq \frac{g(z) - g(y)}{z - y}.$$

Per la dimostrazione del Teorema 1 si veda, ad esempio, Cecconi e Stampacchia (1974), pag. 247-248.

Si indichino, ora, con X ed Y due variabili casuali (v.c.) continue con funzioni di ripartizione (f.r.), rispettivamente, $F_X(x)$ e $G_Y(y)$. Fra gli ordinamenti parziali tra f.r. presenti in letteratura, si ricorda quello dovuto a van Zwet (1964), così definito

Definizione 2

La f.r. $G_Y(y)$ è almeno asimmetrica positiva quanto la f.r. $F_X(x)$ se $G_Y^{-1}\{F_X(x)\} = R(x)$ è convessa su $I = \{x : 0 < F_X(x) < 1\}$.

Se ciò accade si dice che “ F c-precede G ” e si scrive $F_X(x) <_c G_Y(y)$.

Come per gli studi sulla concentrazione, anche nello studio dell’asimmetria di una distribuzione è possibile far riferimento a delle misure puntuali, dette per l’appunto asimmetrie puntuali relative, definite nel continuo nel seguente modo

Definizione 3

Sia X una v.c. con f.r. $F_X(x)$ e sia $x_{(q)} = F_X^{-1}(q)$ il quantile di ordine q , con $q \in (0,1)$. Indicato con M il centro di simmetria, le quantità

$$W(p) = \frac{x_{(p)} + x_{(1-p)} - 2M}{x_{(1-p)} - x_{(p)}} \quad \forall p \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (2.1)$$

sono dette asimmetrie puntuali relative.

Si osservi che nel prosieguo del presente lavoro il centro di simmetria M coinciderà con la mediana della distribuzione.

Brentari (1990, pag. 26-28) dimostra il seguente teorema che fa discendere l’ordinamento tra le asimmetrie puntuali relative dall’ordinamento convesso

Teorema 2

Se $F_X(x) <_c G_Y(y)$ allora $W_Y(p) \geq W_X(p) \quad \forall p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Dalla definizione e dal teorema suesposti, derivano le seguenti osservazioni:

Osservazione 1

Ogni trasformazione convessa (crescente) della v.c. originaria X provoca un aumento dell'asimmetria positiva. Infatti, considerando la v.c. $X \sim F_X(x)$ ed una sua trasformazione $Y=h(X) \sim G_Y(y)$, con $h(\cdot)$ funzione convessa (crescente), si ha:

$$F_X(x) = \Pr\{X \leq x\} = \Pr\{h^{-1}(Y) \leq x\} = \Pr\{Y \leq h(x)\} = G_Y[h(x)] \Rightarrow$$
$$G_Y^{-1}\{F_X(x)\} = G_Y^{-1}\{G_Y[h(x)]\} = h(x) \text{ e poich\acute{e } } h(\cdot) \text{ \u00e8 convessa}$$

(crescente) $\Rightarrow F(x) <_c G(y) \Rightarrow W_Y(p) \geq W_X(p) \quad \forall p \in (0, \frac{1}{2})$.

Osservazione 2

Ogni trasformazione concava (crescente) della v.c. originaria X provoca una riduzione dell'asimmetria positiva. Infatti, si ha: $G_Y(y) = \Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{h(X) \leq y\} = \Pr\{X \leq h^{-1}(y)\} = F_X[h^{-1}(y)]$

$$\Rightarrow F_X^{-1}\{G_Y(y)\} = F_X^{-1}\{F_X[h^{-1}(y)]\} = h^{-1}(y) \text{ e poich\acute{e } quest'ultima \u00e8}$$

convessa (crescente) $\Rightarrow G_Y(y) <_c F_X(x) \Rightarrow W_X(p) \geq W_Y(p) \quad \forall p \in (0, \frac{1}{2})$.

Osservazione 3

Ogni trasformazione convessa (decescente) della v.c. originaria X provoca un aumento dell'asimmetria positiva. Infatti, posto che $h(\cdot)$ sia una funzione convessa (decescente) si ha:

$$F_X(x) = \Pr\{X \leq x\} = \Pr\{h^{-1}(Y) \leq x\} = \Pr\{Y \geq h(x)\} = 1 - G_Y[h(x)]$$
$$\Rightarrow G_Y^{-1}\{F_X(x)\} = G_Y^{-1}\{1 - G_Y[h(x)]\}$$

si evidenzia che quest'ultima quantit\u00e0 \u00e8 il quantile di Y che \u00e8 una funzione convessa (decescente) su $I = \{x : 0 < F(x) < 1\}$ essendo $Y=h(X) \Rightarrow$

$$F_X(x) <_c G_Y(y) \Rightarrow W_Y(p) \geq W_X(p) \quad \forall p \in (0, \frac{1}{2}) .$$

Osservazione 4

Ogni trasformazione concava (decescente) della v.c. originaria X provoca una riduzione dell'asimmetria positiva. Infatti, se $h(\cdot)$ \u00e8 una funzione concava (decescente) si pu\u00f2 scrivere

$$G_Y(y) = \Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{h(X) \leq y\} = \Pr\{X \geq h^{-1}(y)\} = 1 - F_X[h^{-1}(y)]$$

da cui $F_X^{-1}\{G_Y(y)\} = F_X^{-1}\{1 - F_X[h^{-1}(y)]\}$ è il quantile di X che è una funzione convessa (decrecente) su $I_Y = \{y : 0 < G_Y(y) < 1\}$ essendo $X = h^{-1}(Y) \Rightarrow G_Y(y) <_c F_X(x) \Rightarrow W_X(p) \geq W_Y(p) \forall p \in (0, \frac{1}{2})$.

3. Un teorema sulle trasformazioni monotone e le asimmetrie puntuali relative

In questo paragrafo, utilizzando il Teorema 1 sulle funzioni convesse (concave) in un intervallo, si dimostra che le asimmetrie puntuali relative sono ordinate se e soltanto se tra le due v.c. in esame vi è una relazione monotona.

Prima di enunciare e dimostrare il teorema in questione è utile dimostrare il seguente Lemma sulla disuguaglianza tra le asimmetrie puntuali relative.

Lemma

Siano M_x e M_y , rispettivamente, la mediana della v.c. X e quella della v.c. Y . La seguente disuguaglianza tra le asimmetrie puntuali relative di X ed Y

$$W_X(p) \leq W_Y(p) \quad \forall p \in (0, \frac{1}{2}) \quad (3.1)$$

si può scrivere come segue

$$\frac{M_y - y_{(p)}}{M_x - x_{(p)}} \leq \frac{y_{(1-p)} - M_y}{x_{(1-p)} - M_x} \quad \forall p \in (0, \frac{1}{2}) \quad (3.2)$$

Dimostrazione

Dalla (3.1) si ha

$$\frac{\{x_{(1-p)} - M_x\} - \{M_x - x_{(p)}\}}{\{x_{(1-p)} - M_x\} + \{M_x - x_{(p)}\}} \leq \frac{\{y_{(1-p)} - M_y\} - \{M_y - y_{(p)}\}}{\{y_{(1-p)} - M_y\} + \{M_y - y_{(p)}\}}$$

essendo i denominatori di quest'ultima positivi, si ottiene

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[x_{(1-p)} - M_x \right] - \left[M_x - x_{(p)} \right] \right\} \times \left\{ \left[y_{(1-p)} - M_y \right] + \left[M_y - y_{(p)} \right] \right\} \leq \\ & \leq \left\{ \left[x_{(1-p)} - M_x \right] + \left[M_x - x_{(p)} \right] \right\} \times \left\{ \left[y_{(1-p)} - M_y \right] - \left[M_y - y_{(p)} \right] \right\} \end{aligned}$$

moltiplicando ed effettuando le opportune semplificazioni si perviene a

$$2 \left\{ x_{(1-p)} - M_x \right\} \times \left\{ M_y - y_{(p)} \right\} \leq 2 \left\{ y_{(1-p)} - M_y \right\} \times \left\{ M_x - x_{(p)} \right\}$$

da cui si ottiene la (3.2).

Inoltre, posto $Y=h(X)$, la (3.2) può essere riscritta come segue:

$$\frac{h[M_x] - h[x_{(p)}]}{M_x - x_{(p)}} \leq \frac{h[x_{(1-p)}] - h[M_x]}{x_{(1-p)} - M_x} \quad \forall p \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (3.3)$$

Alla luce di quanto detto finora, si propone il seguente

Teorema 3

Siano X ed Y due v.c. con f.r., rispettivamente, date da $F_X(x)$ e $F_Y(y)$. La trasformazione $Y=h(X)$ è convessa se e solo se $W_X(p) \leq W_Y(p) \quad \forall p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Dimostrazione

Innanzitutto, è immediato verificare che

$$M_x = tx_{(p)} + (1-t)x_{(1-p)} \quad (3.4)$$

$$\text{con } t = \frac{x_{(1-p)} - M_x}{x_{(1-p)} - x_{(p)}} \text{ e } t \in [0,1], \quad \forall p \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Posto che sia vera la seguente $W_X(p) \leq W_Y(p) \quad \forall p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, dobbiamo dimostrare che $Y=h(X)$ è una funzione convessa. Dalla (3.3) si può scrivere

$$h(M_x) \leq h[x_{(p)}] + \frac{M_x - x_{(p)}}{x_{(1-p)} - M_x} \{h[x_{(1-p)}] - h(M_x)\}$$

$$\begin{aligned}
h(M_x) \left\{ 1 + \frac{M_x - x_{(p)}}{x_{(1-p)} - M_x} \right\} &\leq h[x_{(p)}] + \frac{M_x - x_{(p)}}{x_{(1-p)} - M_x} h[x_{(1-p)}] \\
h(M_x) &\leq \frac{x_{(1-p)} - M_x}{x_{(1-p)} - x_{(p)}} h[x_{(p)}] + \frac{M_x - x_{(p)}}{x_{(1-p)} - x_{(p)}} h[x_{(1-p)}]
\end{aligned}$$

e ricordando la (3.4), si ha:

$$\begin{aligned}
h \left[\left(\frac{x_{(1-p)} - M_x}{x_{(1-p)} - x_{(p)}} \right) x_{(p)} + \left(\frac{M_x - x_{(p)}}{x_{(1-p)} - x_{(p)}} \right) x_{(1-p)} \right] &\leq \\
&\leq \frac{x_{(1-p)} - M_x}{x_{(1-p)} - x_{(p)}} h[x_{(p)}] + \frac{M_x - x_{(p)}}{x_{(1-p)} - x_{(p)}} h[x_{(1-p)}]
\end{aligned}$$

cioè $h(\cdot)$ soddisfa la Definizione 1 di funzione convessa.

Dobbiamo ora verificare che se $Y=h(X)$ è una trasformazione convessa allora $W_X(p) \leq W_Y(p) \forall p \in (0, \frac{1}{2})$. Questa affermazione è dimostrata implicitamente dal Teorema 2, ma molto più semplicemente può essere dimostrata in altro modo. Infatti, dato che per ipotesi $h(\cdot)$ è una funzione convessa, dal Teorema 1 si ha:

$$\frac{h(M_x) - h[x_{(p)}]}{M_x - x_{(p)}} \leq \frac{h[x_{(1-p)}] - h[x_{(p)}]}{x_{(1-p)} - x_{(p)}} \leq \frac{h[x_{(1-p)}] - h[M_x]}{x_{(1-p)} - M_x} \quad (3.5)$$

quest'ultima dimostra che la (3.2) è soddisfatta e, quindi, anche che la disuguaglianza $W_X(p) \leq W_Y(p) \forall p \in (0, \frac{1}{2})$ è vera.

Analogamente a quanto sopra esposto, possiamo dimostrare l'equivalente del Teorema 3 nel caso di trasformazioni concave. A tal fine basta ricordare che se $g(\cdot)$ è concava allora $-g(\cdot)$ è una funzione convessa. Tenendo conto delle opportune modifiche, è immediato dimostrare il seguente Corollario che lega le trasformazioni concave e l'ordinamento tra le asimmetrie puntuali relative.

Corollario

Siano X ed Y due v.c. con f.r., rispettivamente, date da $F_X(x)$ e $F_Y(y)$. La trasformazione $Y=h(X)$ è concava se e solo se $W_X(p) \geq W_Y(p) \quad \forall p \in (0, \frac{1}{2})$.

4. Alcuni esempi

Di seguito riportiamo alcuni esempi di applicazioni dei teoremi visti nel paragrafo precedente. In particolare, nel primo esempio si studia il legame tra la v.c. esponenziale (negativa) e la v.c. di Pareto. Nel secondo si analizza la trasformazione logaritmica della v.c. di Dagum. In entrambi gli esempi, si fornisce una interpretazione dei parametri in termini di asimmetria.

A) Esponenziale - Pareto.

Sia X una v.c. esponenziale negativa con f.r. $F_X(x; \theta) = 1 - e^{-\theta x}$ per $\theta > 0$ e $x > 0$, e quantile di ordine q dato da $x_{(q)} = \frac{-\ln(1-q)}{\theta}$ per $q \in (0, 1)$. E' immediato verificare che la curva delle asimmetrie puntuali relative associata a $F_X(x; \theta)$ è data da:

$$W_X(p) = \frac{\ln[4p(1-p)]}{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)} \quad \forall p \in (0, \frac{1}{2}) \quad (4.1)$$

La trasformazione convessa $Y=e^X$ ha la seguente funzione di ripartizione

$$F_Y(y) = P_r\{Y \leq y\} = P_r\{X \leq \ln(y)\} = F_X[\ln(y)] = 1 - y^{-\theta}$$

cioè la ripartizione di una v.c. di Pareto con $y \geq y_0 = 1$ e $\theta > 0$. Il quantile di ordine q è $y_{(q)} = (1-q)^{-\frac{1}{\theta}}$ con $q \in (0, 1)$. Le curve di asimmetrie puntuali relative sono

$$W_Y(p; \theta) = \frac{p^{-\frac{1}{\theta}} + (1-p)^{-\frac{1}{\theta}} - 2^{1+\frac{1}{\theta}}}{p^{-\frac{1}{\theta}} - (1-p)^{-\frac{1}{\theta}}} \quad \forall p \in (0, \frac{1}{2}) \text{ e } \theta > 0. \quad (4.2)$$

Per il Teorema 3 visto precedentemente, si ha $W_Y(p; \theta) \geq W_X(p)$ per ogni $\forall p \in (0, \frac{1}{2})$ e $\theta > 0$. Infatti, si dimostra [Brentari (1990), pag.91, Appendice A] che

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} W_Y(p; \theta) = W_X(p) \quad (4.3)$$

Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} W_Y(p; \theta) &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{p^{-\frac{1}{\theta}}}{p^{-\frac{1}{\theta}} - (1-p)^{-\frac{1}{\theta}}} + \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1-p)^{-\frac{1}{\theta}}}{p^{-\frac{1}{\theta}} - (1-p)^{-\frac{1}{\theta}}} + \\ &\quad - 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{\theta}}}{p^{-\frac{1}{\theta}} - (1-p)^{-\frac{1}{\theta}}} = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\theta}}} + \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{1}{\theta}} - 1} - 2 \left\{ \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\theta}}} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} (2p)^{\frac{1}{\theta}} \right\} = 1 \quad (4.4) \end{aligned}$$

essendo $p \in (0, \frac{1}{2})$.

Dalla (4.3) e (4.4) si evince, innanzitutto, che Y è almeno asimmetrica positiva quanto X per ogni valore di θ . Inoltre, tale parametro può essere visto come indicatore inverso di asimmetria. Nella Figura 1 sono riportate, per diversi valori di θ , le asimmetrie puntuali relative di una Pareto. Si evidenzia che la curva più vicina all'asse delle ascisse è relativa ad una v.c. esponenziale negativa come descritto dalla (4.3).

B) Dagum – LogDagum.

Una v.c. X continua e positiva appartiene al modello di Dagum (1977, 1980), con parametro di scala pari ad 1 ($\lambda=1$), se presenta la

seguito funzione di ripartizione $F_X(x; \beta, \delta) = (1 + x^{-\delta})^{-\beta}$ con $\beta > 0$ e $\delta > 0$. E' immediato verificare che il quantile di ordine q è $x_{(q)} = \left(q^{\frac{1}{\beta}} - 1\right)^{-\frac{1}{\delta}}$ per $q \in (0, 1)$ e le corrispondenti asimmetrie puntuali relative, per $p \in (0, \frac{1}{2})$, sono:

$$W_Y(p; \beta, \delta) = \frac{\left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1\right]^{-\frac{1}{\delta}} + \left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1\right]^{\frac{1}{\delta}} - 2\left[2^{\frac{1}{\beta}} - 1\right]^{-\frac{1}{\delta}}}{\left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1\right]^{-\frac{1}{\delta}} - \left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1\right]^{\frac{1}{\delta}}} \quad (4.5)$$

La trasformazione $Y = \ln(X)$ ha la seguente funzione di ripartizione:

$$F_Y(y; \beta, \delta) = P_r\{Y \leq y\} = P_r\{X \leq e^y\} = F_X(e^y; \beta, \delta) = [1 + e^{-\delta y}]^{-\beta}$$

e quantile di ordine q , $q \in (0, 1)$, dato da $y_{(q)} = -\frac{1}{\delta} \ln\left[q^{\frac{1}{\beta}} - 1\right]$. Da quest'ultimo otteniamo le asimmetrie puntuali relative:

$$W_Y(p; \beta) = \frac{2 \ln\left(2^{\frac{1}{\beta}} - 1\right) + \ln\left(p^{-\frac{1}{\beta}} - 1\right) - \ln\left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1\right]}{\ln\left(p^{-\frac{1}{\beta}} - 1\right) - \ln\left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1\right]} \quad (4.6)$$

per $p \in (0, \frac{1}{2})$. Si evidenzia che la (4.6), a differenza della (4.5), dipende solo dal parametro β . Per il Corollario visto nel precedente paragrafo, si ha $W_Y(p; \beta) \leq W_Y(p; \beta, \delta)$ $p \in (0, \frac{1}{2})$ e $\forall \delta > 0$, $\delta > 0$. Infatti, posto β costante, applicando la regola di Hospital si ottiene:

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} W_X(p; \beta, \delta) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}} \ln \left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right] + \left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}} \ln \left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right] - 2 \left[2^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}} \ln \left[2^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right]}{\left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}} \ln \left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right] - \left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}} \ln \left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]} = \\
&= \frac{\ln \left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right] + \ln \left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right] - 2 \ln \left[2^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right]}{\ln \left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right] - \ln \left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]} = W_Y(p; \beta) \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Ipotizzando β costante, inoltre, si ha:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} W_X(p; \beta, \delta) = 1 \quad (4.8)$$

Infatti, evidenziando che $\left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right] < \left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]$ e $\left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right] < \left[2^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right]$ per $p \in (0, \frac{1}{2})$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}}}{\left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}} - \left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}}} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}}}{\left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}} - \left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}}} + \\
&\quad - 2 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\left[2^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}}}{\left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}} - \left[p^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}}} = \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \left[\frac{(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1}{p^{-\frac{1}{\beta}} - 1} \right]^{\frac{1}{\delta}}} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left[\frac{p^{-\frac{1}{\beta}} - 1}{(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1} \right]^{\frac{1}{\delta}} - 1} +
\end{aligned}$$

$$-2 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \left[\frac{(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1}{p^{-\frac{1}{\beta}} - 1} \right]^{\frac{1}{\delta}}} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\frac{(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1}{2^{\frac{1}{\beta}} - 1} \right]^{\frac{1}{\delta}} = 1 + 0 - 2 \times 1 \times 0 = 1$$

Le relazioni (4.7) e (4.8) evidenziano che la v.c. log-Dagum è *al più* asimmetrica quanto la v.c. di Dagum; inoltre, dalle stesse relazioni si evince che il parametro δ di una v.c. di Dagum è un indicatore *inverso* di asimmetria.

A questo punto risulta interessante studiare tali v.c. al variare del parametro β . Nel caso della v.c. di Dagum, dopo qualche manipolazione algebrica, si può scrivere

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} W_x(p; \beta, \delta) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{\left[1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}} \right]^{\frac{1}{\delta}}}{(1-p)^{\frac{1}{\beta\delta}} \left[1 - p^{\frac{1}{\beta}} \right]^{\frac{1}{\delta}}}} + \\ &+ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(1-p)^{\frac{1}{\beta\delta}} \left[1 - p^{\frac{1}{\beta}} \right]^{\frac{1}{\delta}}}{\left[1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}} \right]^{\frac{1}{\delta}} p^{\frac{1}{\beta\delta}}} - 1} + \\ &- 2 \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 - p^{\frac{1}{\beta}}}{2^{\frac{1}{\beta}} - 1} \right\}^{\frac{1}{\delta}} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-p)^{\frac{1}{\beta\delta}} \left\{ \frac{1 - p^{\frac{1}{\beta}}}{1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}}} \right\}^{\frac{1}{\delta}} - p^{\frac{1}{\beta\delta}}} = \\ &= \frac{1}{1 - \left[\frac{\ln(1-p)}{\ln(p)} \right]^{\frac{1}{\delta}}} + \frac{1}{\left[\frac{\ln(p)}{\ln(1-p)} \right]^{\frac{1}{\delta}} - 1} \left\{ 1 - 2 \left[\frac{-\ln(p)}{\ln(2)} \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

ottenuta applicando alle forme indeterminate la regola di Hospital. Mentre, quando β tende a zero, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow 0^+} W_X(p; \beta, \delta) &= \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \left\{ \frac{1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}}}{1 - p^{\frac{1}{\beta}}} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\}^{\frac{1}{\delta}}} + \\
&+ \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left\{ \frac{1 - p^{\frac{1}{\beta}}}{1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}}} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\}^{\frac{1}{\delta}} - 1} + \\
&- 2 \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left[1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}} \right]^{\frac{1}{\delta}} \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \left\{ \left(\frac{p}{1-p} \right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}}}{1 - p^{\frac{1}{\beta}}} \right\}^{\frac{1}{\delta}}} \times \\
&\times \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\frac{1}{(1-p)^{\frac{1}{\beta}}}}{2^{\frac{1}{\beta}} - 1} \right\}^{\frac{1}{\delta}} = 1 + 0 - 2 \times 1 \times 1 \times 0 = 1 \quad (4.10)
\end{aligned}$$

ottenuto applicando la regola di Hospital alla forma indeterminata presente nell'ultimo limite. La (4.10) evidenzia che per β che tende a zero il modello di Dagum raggiunge il massimo valore teorico di asimmetria positiva. Inoltre, per il modello in analisi, dalle relazioni (4.9) e (4.10) si può concludere che il parametro β può essere visto come indicatore *inverso* di asimmetria.

Per quanto riguarda la v.c. log-Dagum si osservi, innanzitutto, che da $F_Y(y; \beta, \delta)$ la funzione di densità risulta essere

$$f_Y(y; \beta, \delta) = \beta \delta e^{-\delta y} (1 + e^{-\delta y})^{-\beta-1}$$

da cui è semplice verificare che la moda (M_0^Y) è data da

$$M_0^Y = -\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

Per la determinazione dei momenti si può far ricorso alla funzione generatrice dei momenti la quale, data la relazione $Y=\ln(X)$, coincide con il momento di ordine t della Dagum, cioè

$$m_Y(t) = E[e^{Yt}] = E[X^t] = \beta B\left(\hat{\alpha} + \frac{t}{\delta}, 1 - \frac{t}{\delta}\right)$$

per $\delta > t$, da quest'ultima il primo cumulante è

$$K_1(Y) = E[Y] = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \ln[m_Y(t)] \right\}_{t=0} = \frac{1}{\delta} [\Psi(\beta) - \Psi(1)]$$

dove con $\psi(\cdot)$ si è indicata la funzione digamma [si veda, ad esempio, Gradshteyn Ryzhik (1980), pag. 943]. Ricordando, infine, che la mediana è data da

$$M_Y = -\frac{1}{\delta} \ln\left(2^{\frac{1}{\beta}} - 1\right)$$

è immediato constatare che per $\beta=1$ si ha:

$$M_Y = E(Y) = M_0^Y = 0.$$

Analizziamo, ora, il comportamento delle asimmetrie puntuali relative $W_Y(p;\beta)$, descritte dalla (4.6), in corrispondenza dei valori limite del parametro β . Al tendere di tale parametro ad infinito, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow \infty} W_Y(p; \beta) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \left\{ \frac{p^{-\frac{1}{\beta}} - 1}{(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1} \right\}} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln \left\{ \frac{\left(2^{\frac{1}{\beta}} - 1\right)^2}{\left(p^{-\frac{1}{\beta}} - 1\right) \left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1\right]} \right\} = \\
&= \frac{1}{\ln \left\{ \frac{\ln(p)}{\ln(1-p)} \right\}} \ln \left\{ \frac{[\ln(2)]^2}{\ln(p) \ln(1-p)} \right\} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

infatti, applicando per due volte consecutive la regola di Hospital alla seguente forma indeterminata, si ottiene

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\left(2^{\frac{1}{\beta}} - 1\right)^2}{\left(p^{-\frac{1}{\beta}} - 1\right) \left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1\right]} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{N(\beta)}{D(\beta)} = \ln \frac{[\ln(2)]^2}{\ln(p) \ln(1-p)} \quad (4.12)$$

dove

$$\begin{aligned}
N(\beta) &= \left\{ 2^{\frac{1}{\beta}+1} \left[2^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right] \ln(2) + 2^{\frac{2}{\beta}+1} \ln(2) \right\} \ln(2) \\
D(\beta) &= \left\{ p^{-\frac{1}{\beta}} \left[(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right] \ln(p) + [p(1-p)]^{\frac{1}{\beta}} \ln(1-p) \right\} \ln(p) \\
&\quad + \left\{ (1-p)^{-\frac{1}{\beta}} \left(p^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right) \ln(1-p) + [p(1-p)]^{\frac{1}{\beta}} \ln(p) \right\} \ln(1-p).
\end{aligned}$$

Il limite descritto dalla (4.12) in connessione con il seguente

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{p^{-\frac{1}{\beta}} - 1}{(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} - 1} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\frac{p^{-\frac{1}{\beta}} \ln(p)}{\beta^2}}{\frac{(1-p)^{-\frac{1}{\beta}} \ln(1-p)}{\beta^2}} = \frac{\ln(p)}{\ln(1-p)}$$

forniscono il risultato (4.11).

Al fine di analizzare il comportamento per β tendente a zero, si riscrivano le asimmetrie puntuali relative, $W_Y(p;\beta)$, nel seguente modo

$$W_Y(p;\beta) = \frac{2 \ln\left(2^{\frac{1}{\beta}} - 1\right) + \frac{1}{\beta} \ln[p(1-p)] - \ln\left\{\left(1 - p^{\frac{1}{\beta}}\right)\left[1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}}\right]\right\}}{\ln\left(\frac{1 - p^{\frac{1}{\beta}}}{1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}}}\right) + \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)}$$

Inoltre, tenendo conto che

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\beta}}{\ln\left(2^{\frac{1}{\beta}} - 1\right)} = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{\left(-\frac{1}{\beta^2}\right)}{\frac{2^{\frac{1}{\beta}} \ln(2)}{2^{\frac{1}{\beta}} - 1} \left(-\frac{1}{\beta^2}\right)} = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{\beta}}}}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \text{ si ha:}$$

$$2 \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln\left[\frac{1 - p^{\frac{1}{\beta}}}{1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}}}\right] + \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)} = \frac{2 \ln(2)}{\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{\ln[p(1-p)]}{\ln\left[\frac{1 - p^{\frac{1}{\beta}}}{1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}}}\right] + \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)} = \frac{\ln[p(1-p)]}{\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left\{\left(1 - p^{\frac{1}{\beta}}\right)\left[1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}}\right]\right\}}{\ln\left[\frac{1 - p^{\frac{1}{\beta}}}{1 - (1-p)^{\frac{1}{\beta}}}\right] + \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)} = 0$$

da questi ultimi tre limiti si può verificare che

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} W_Y(p, \beta) = \frac{2 \ln(2)}{\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)} + \frac{\ln[p(1-p)]}{\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)} = \frac{\ln[4p(1-p)]}{\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)} \quad (4.13)$$

E' importante evidenziare che la (4.13) è una quantità negativa e sempre maggiore di -1 in quanto $4p(1-p) < 1$ e $\frac{1-p}{p} > 1$; inoltre, poiché $[\ln(2)]^2 > \ln(p)\ln(1-p) \forall p \in (0, \frac{1}{2})$, la (4.12) risulta essere positiva.

Da queste ultime osservazioni si può concludere che il parametro β può essere considerato un indicatore *diretto* di asimmetria per il modello log-Dagum.

Al fine di evidenziare l'interpretazione del parametro β in termini di asimmetria, vengono riportate nelle Figure 2 e 3, rispettivamente, le funzioni di densità e le asimmetrie puntuali relative di una v.c. log-Dagum per diversi valori del parametro in esame. In particolare, si osservi che per $\beta=0.5$ si ha una densità chiaramente asimmetrica negativa con asimmetrie puntuali relative tutte minori di zero, per $\beta=15$ le $W_Y(p; \beta)$ sono tutte positive e, quindi, si è in presenza di una densità asimmetrica positiva e, infine, per $\beta=1$ tutte le asimmetrie puntuali sono nulle di conseguenza la densità è simmetrica.

5. Conclusioni

In questa breve nota si è analizzata la relazione esistente tra l'ordinamento convesso e le asimmetrie puntuali relative. Si è dimostrato, in particolare, che se le curve delle asimmetrie puntuali relative a due variabili casuali sono ordinate allora tra dette variabili esiste una relazione monotona. Tramite un esempio, infine, si è introdotta ed analizzata la trasformazione logaritmica della v.c. di Dagum, denominata per l'appunto, v.c. Log-Dagum.

Riferimenti Bibliografici

Brentari E. (1990) *Asimmetria e Misure di Asimmetria*, Giappichelli Editore, Torino.

Cecconi J.P., Stampacchia G. (1974) *Analisi Matematica*, Primo Volume, Liguore Editore, Napoli.

Dagum C. (1977) A new model of personal income distribution: specification and estimation, *Economie Appliquée*, XXX, 3, pp. 413-437.

Dagum C. (1980) The generation and distribution of income, the Lorenz curve and the Gini ratio, *Economie Appliquée*, XXXIII, 2, pp.327-367.

Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. (1980) *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York.

Zwet van W.R. (1964) *Convex Transformations of Random Variables*, Mathematical Centre Tracts, 7, Amsterdam.

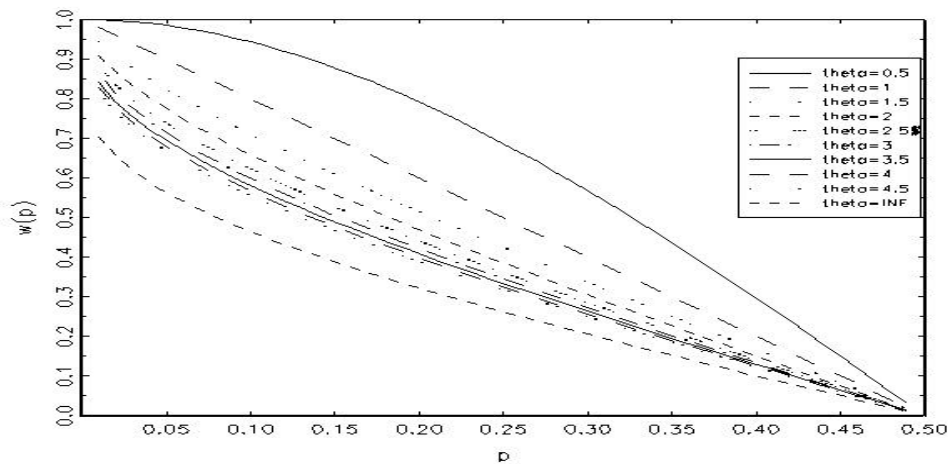


Figura 1. Pareto: A.P.R. al variare del parametro θ

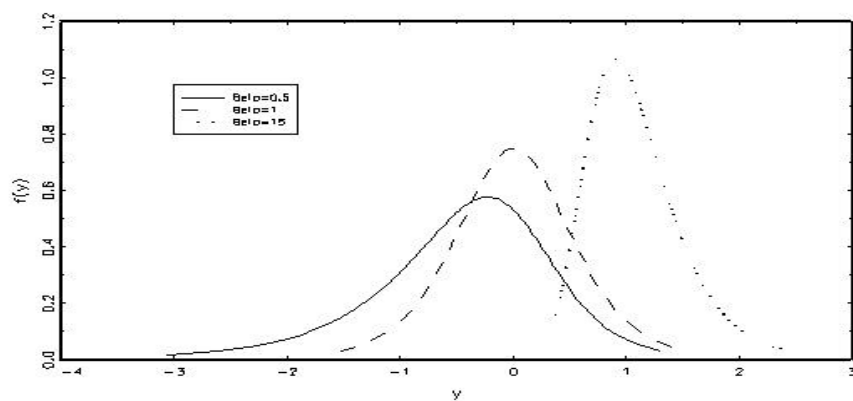


Figura 2. Funzione di densità Log-Dagum. ($d=3$).

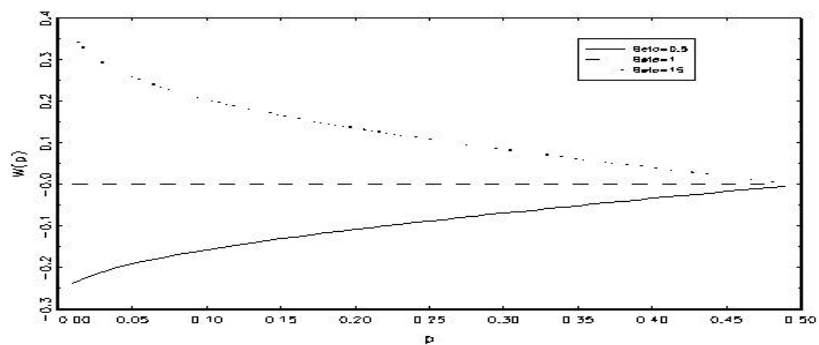


Figura 3. Log-Dagum: A.P.R. al variare di \mathbf{b} .