

## **Uno studio sull'asimmetria dello stimatore della metrica Autoregressiva**

Angela D'Elia

*Dipartimento di Scienze Statistiche, Università di Napoli Federico II*

*E-mail: angdelia@unina.it*

*Summary:* In this paper we discuss the asymmetry of the Autoregressive metric estimator. Indeed, our aim is to find a symmetrizing transformation in order to use a Normal random variable approximation. This fact would make easier the inferential procedures on the Autoregressive metric, which would result operatively more feasible. Theoretical results with respect to several models are found and simulation evidences are illustrated, too. Also, with respect to the issue of seasonal adjustment some results are discussed. Finally, an operative procedure is highlighted to transform and to make inference on the Autoregressive metric.

*Key words:* AR metric, Asymmetry, Normal Approximation, Transformations

### ***1. Introduzione***

In questi ultimi decenni la continua e veloce evoluzione della realtà nella quale viviamo ha fatto sì che fosse sempre più avvertita l'esigenza di disporre di strumenti capaci di discriminare tra dinamiche differenti. In particolare, nella letteratura e nella pratica statistica, è emersa la necessità di poter classificare le serie storiche osservate, per applicare la stessa metodologia a gruppi di serie, per individuare la serie rappresentativa e i comportamenti anomali, per valutare l'adeguatezza di procedure di destagionalizzazione, ecc. (Piccolo, 1989; Maharaj, 1996; Corduas e Piccolo, 1999).

Evidentemente, per perseguire tali obiettivi è necessario pervenire a misure di distanza tra serie storiche che consentono di discriminare tra esse rendendone, quindi, possibile la classificazione (Corduas, 1992). A tale riguardo, la metrica Autoregressiva (AR) proposta da Piccolo (1984) gode di numerose proprietà teoriche, oltre ad essere computazionalmente agevole e di coerente interpretazione in termini previsivi (Piccolo, 1989; 1990).

Nell'ambito dell'analisi delle proprietà statistiche della metrica AR, in questo lavoro svolgiamo uno studio sull'asimmetria del suo stimatore. Da un punto di vista operativo, l'utilizzo di una distanza richiede la conoscenza della distribuzione del suo stimatore, al fine, ad esempio, di costruire intervalli di confidenza o di effettuare test delle ipotesi. In particolare, in presenza di distribuzioni asimmetriche (come appare evidente nel caso dello stimatore della metrica AR, che assume necessariamente valori non negativi) risulta importante studiare la possibilità di individuare una trasformazione che riduca tale asimmetria. E' noto, infatti, che l'asimmetria di una distribuzione gioca un ruolo importante in termini di inadeguatezza dell'approssimazione normale (Hinkley, 1975; Johnson, 1978; Hall, 1992; Sutton, 1993; Pace e Salvan, 1996). Risulta quindi necessario studiare, sia da un punto di vista teorico che attraverso simulazioni, il comportamento dell'asimmetria dello stimatore della metrica AR, sotto diverse specificazioni modellistiche, e individuare le corrispondenti trasformazioni "simmetrizzanti". In tal modo, si delinea una procedura operativa, tramite la quale è possibile approssimare la distribuzione dello stimatore con la variabile casuale (v.c.) Normale, rendendo quindi più agevole l'inferenza sulla metrica AR.

L'articolo è organizzato come segue. Nel paragrafo 2 sono richiamati i principali risultati relativi alla distribuzione asintotica dello stimatore della metrica AR, pervenendo, poi, alla formulazione dell'asimmetria sotto diverse specificazioni modellistiche. Un approccio alla riduzione della asimmetria della distribuzione di forme quadratiche è illustrato, quindi, nel paragrafo 3. Sulla base di tali risultati, nel paragrafo 4 viene individuata una trasformazione che riduce l'asimmetria dello stimatore della metrica AR, per diversi modelli. L'efficacia di tale trasformazione ed un confronto con la trasformazione di Box e Cox (1964), in termini di ap-

prossimazione alla Normalità, sono discussi nel paragrafo 5, mediante uno studio di simulazioni. Nel paragrafo 6 la distribuzione dello stimatore della metrica AR, previa trasformazione, viene approssimata alla v.c. Normale standardizzata. Il modello *Airline* e i risultati ad esso relativi sono invece oggetto del paragrafo 7. L'individuazione di una procedura operativa per condurre un'inferenza di tipo asintotico sulla metrica AR, nonché alcune considerazioni finali concludono il lavoro.

## 2. L'asimmetria della metrica Autoregressiva

Utilizzando la notazione standard di Box e Jenkins (1970), indichiamo con  $Z_t \sim ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$  un processo stocastico definito dalle relazioni ricorsive nell'operatore  $B$  (tale che  $B^k Z_t = Z_{t-k}, \forall k = 0, \pm 1, \dots$ ):

$$\phi(B)\Phi(B^s)\nabla^d\nabla_s^D Z_t = \theta(B)\Theta(B^s)a_t,$$

dove  $a_t \sim WN(0, \sigma^2)$  è un processo White Noise, e tutte le radici di

$$\phi(B)\Phi(B^s)\theta(B)\Theta(B^s) = 0$$

sono esterne al cerchio unitario.

Essendo il processo invertibile, esiste per  $Z_t$  la formulazione Autoregressiva  $\pi(B)Z_t = a_t$ , dove

$$\pi(B) = \phi(B)\Phi(B^s)\nabla^d\nabla_s^D\theta^{-1}(B)\Theta^{-1}(B^s) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$$

e  $\sum |\pi_j| < \infty$ . Poiché, noti i valori iniziali e gli ordini del modello, ogni processo ARIMA invertibile è completamente caratterizzato da  $\{\sigma^2; \pi_j, j = 1, 2, \dots\}$ , si perviene ad una metrica Autoregressiva tra due processi  $X_t$  e  $Y_t$  considerando la seguente distanza (Piccolo, 1984; 1990):

$$d^2(X_t, Y_t) = \sum_{j=1}^{\infty} (\pi_{X,j} - \pi_{Y,j})^2.$$

Con riferimento alla classe dei processi ARMA, si dimostra (Piccolo, 1989; Corduas, 1996) che, sotto l'ipotesi nulla  $H_0: d^2(X_t, Y_t) = 0$ , lo stimatore di massima verosimiglianza  $\hat{d}^2$  ha la seguente distribuzione asintotica:

$$\hat{d}^2 \sim 2 \sum_{k=1}^K \lambda_k \chi_{g_k}^2,$$

dove  $K \leq p + q$ , mentre  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$  sono gli autovalori della matrice  $\Omega$  di varianze e covarianze dei coefficienti autoregressivi del modello ARMA e, generalmente,  $g_k = 1, \forall k = 1, 2, \dots, K$ .

In presenza della sola componente AR,  $\Omega = \mathbf{V}$ , dove  $\mathbf{V}$  è la matrice di varianze e covarianze dei parametri del modello.

In generale, risulta (Corduas, 1992):

$$\mathbb{E}(\hat{d}^2) = 2 \operatorname{tr}(\Omega); \quad \operatorname{Var}(\hat{d}^2) = 8 \operatorname{tr}(\Omega^2);$$

$$\operatorname{Asym}(\hat{d}^2) = [2^{-1} \operatorname{tr}(\Omega^2)]^{-3/2} \operatorname{tr}(\Omega^3).$$

Si noti che nel caso la metrica AR sia definita come distanza tra un modello stimato a partire dalla serie osservata e il modello "vero", allora  $\hat{d}^2 \sim \sum_{k=1}^K \lambda_k \chi_{g_k}^2$  e le precedenti espressioni diventano:

$$\mathbb{E}(\hat{d}^2) = \operatorname{tr}(\Omega); \quad \operatorname{Var}(\hat{d}^2) = 2 \operatorname{tr}(\Omega^2);$$

resta inalterata l'espressione dell'asimmetria, essendo questa invariante per scala.

Sfruttando tali relazioni e la conoscenza della matrice  $\mathbf{V}$  (o, più in generale, di  $\Omega$ ) è possibile ottenere l'espressione dell'asimmetria dello stimatore  $\hat{d}^2$  sotto diversi modelli che, ora, specifichiamo nei casi più semplici.

- $Z_t \sim \text{AR}(1); Z_t \sim \text{MA}(1)$

In entrambi i casi, una semplice algebra mostra che:

$$\operatorname{Asym}(\hat{d}^2) = 2\sqrt{2} = 2.828.$$

In tal caso, del resto, lo stimatore della metrica AR si distribuisce come:  $\hat{d}^2 \sim \lambda_1 \chi_1^2$ , per cui

$$Asym(\hat{d}^2) = Asym(\chi_1^2) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2};$$

ciò è confermato dal fatto che:

$$Asym(\lambda \chi_g^2) = Asym(\chi_g^2) = \sqrt{8/g}, \forall g > 0.$$

- $Z_t \sim \text{AR}(2)$

$$Asym(\hat{d}^2) = \frac{2(1 + 3\beta_{AR}^2)}{(1 + \beta_{AR}^2)\sqrt{1 + \beta_{AR}^2}},$$

dove abbiamo posto  $\beta_{AR} = \phi_1/(1 - \phi_2) = \rho(1)$ , essendo  $\rho(1)$  indica la funzione di autocorrelazione globale al lag 1.

In particolare, quando  $|\rho(1)| = 1$ , l'asimmetria di  $\hat{d}^2$  raggiunge il suo massimo, pari a  $2\sqrt{2}$ . Poiché  $|\rho(1)| = 1 \Leftrightarrow \phi_1 \pm \phi_2 = 1$ , l'asimmetria risulta massima in presenza di una radice sul cerchio unitario. Quando, invece,  $\phi_1 = 0$ , l'asimmetria risulta minima:  $Asym(\hat{d}^2) = 2$ .

L'andamento dell'asimmetria dello stimatore  $\hat{d}^2$  nello spazio parametrico ammissibile per  $\phi_1$  e  $\phi_2$  è illustrato nella Figura 1.

- $Z_t \sim \text{ARMA}(1,1)$

$$Asym(\hat{d}^2) = \frac{2(4 - 3\beta_{ARMA})}{(2 - \beta_{ARMA})\sqrt{2 - \beta_{ARMA}}},$$

avendo posto

$$\beta_{ARMA} = \frac{(1 - \phi^2)(1 - \theta^2)}{(1 - \phi\theta)^2}, \quad \beta_{ARMA} \in [0, 1].$$

In tal caso, l'asimmetria è massima ed è pari a  $Asym(\hat{d}^2) = 2\sqrt{2}$  quando  $\beta_{ARMA} = 0$ , cioè se  $(1 - \phi^2)(1 - \theta^2) = 0$ . Quindi, analogamente al caso dell'AR(1), in presenza di radici sul cerchio unitario, l'asimmetria

dello stimatore  $\hat{d}^2$  è massima. Essa, invece, è minima, ed in tal caso vale 2, se  $\beta_{ARMA} = 1$ , cioè se  $\phi = \theta$ : quando, cioè, gli operatori AR e MA si “cancellano” ed il processo è White Noise. In quest’ultimo caso, del resto, è agevole dimostrare che  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , per cui:  $\hat{d}^2 \sim \chi_1^2 + \chi_1^2 = \chi_2^2$ , e  $Asym(\chi_2^2) = 2$ . Nella Figura 2 è illustrato l’andamento dell’asimmetria di  $\hat{d}^2$  al variare dei parametri  $\phi$  e  $\theta$ .

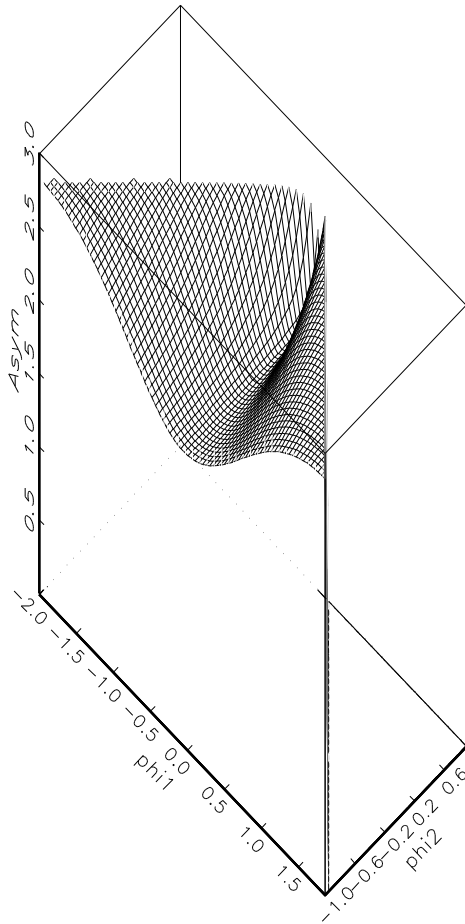


Figura 1. AR(2): asimmetria di  $\hat{d}^2$  al variare di  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

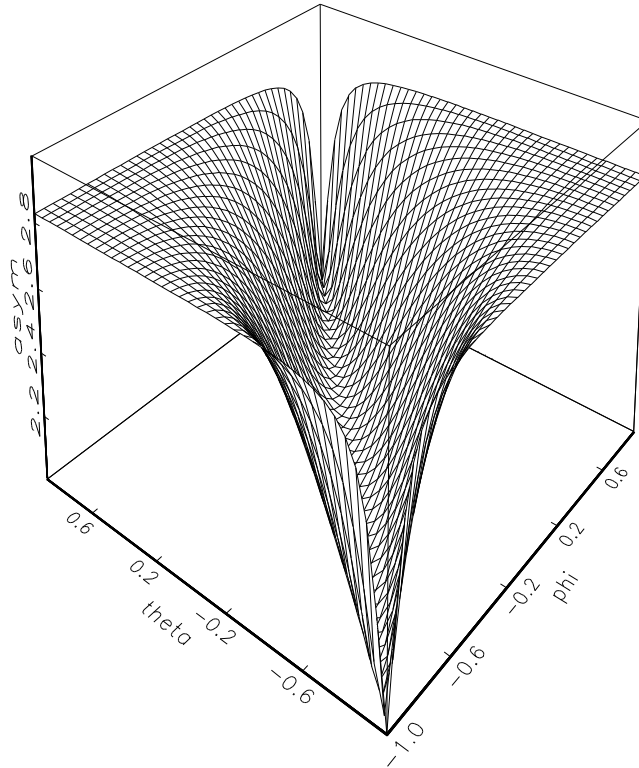


Figura 2. ARMA(1,1): asimmetria di  $\hat{d}^2$  al variare di  $\phi$  e  $\theta$ .

### 3. La riduzione dell'asimmetria

Al fine di individuare una trasformazione che riduca l'asimmetria dello stimatore  $\hat{d}^2$  della metrica AR, è utile ricordare che esso può essere espresso come forma quadratica:

$$\hat{d}^2 = 2\psi'\Omega\psi,$$

dove  $\psi = (2\Omega)^{-1/2}(\hat{\pi}_x - \hat{\pi}_y)$ , ovvero  $\hat{d}^2 = \psi'\Omega\psi$ ,  $\psi = \Omega^{-1/2}(\hat{\pi}_x - \hat{\pi}_y)$  nel caso la metrica sia definita come distanza rispetto al vero modello (Corduas, 1996).

Ne consegue che è possibile sfruttare alcuni risultati relativi alle trasformazioni normalizzanti delle forme quadratiche (Mathai e Provost, 1992).

Infatti, data una forma quadratica  $Q$ , Jensen e Solomon (1972) individuano una trasformazione normalizzante  $Z = (Q/\mathbb{E}(Q))^h$ , determinando  $h$  in modo da ridurre l'ordine del momento terzo centrale di  $Z$ . In tal modo, riducendo l'asimmetria di  $Z$ , si ottiene lo stesso effetto anche per la forma quadratica  $Q$ .

In particolare, il procedimento suggerito conduce alla trasformazione  $T(Q) = Q^h$ , dove

$$h = 1 - \frac{2t_1 t_3}{3t_2^2},$$

dove, nel caso dello stimatore  $\hat{d}^2$ , abbiamo indicato con:

$$\begin{aligned} t_1 &= tr(\Omega) = \mathbb{E}(\hat{d}^2); \\ t_2 &= tr(\Omega^2) = Var(\hat{d}^2)/2; \\ t_3 &= tr(\Omega^3) = \frac{Asym(\hat{d}^2) (Var(\hat{d}^2))^{3/2}}{8}. \end{aligned}$$

Pertanto, si ottiene che:

$$h = 1 - \frac{Asym(\hat{d}^2)}{3CV(\hat{d}^2)}, \quad (1)$$

essendo  $CV(\cdot)$  il coefficiente di variazione<sup>1</sup>.

In tal modo, la distribuzione dello stimatore trasformato  $(\hat{d}^2)^h$  risulta meno asimmetrica di quella di  $\hat{d}^2$ , ed in quanto tale si avvicina maggiormente alla distribuzione Normale.

---

<sup>1</sup>E' agevole constatare che si perviene allo stesso risultato (1), anche se si considera il caso della distanza tra due modelli stimati.



#### 4. Alcuni casi di trasformazioni

Sulla base del risultato ottenuto mediante la (1), è possibile determinare la trasformazione  $h$  per diverse specificazioni modellistiche.

Ricordando le espressioni di valor medio, varianza ed asimmetria dello stimatore  $\hat{d}^2$  (paragrafo 2), si perviene così ai seguenti valori per  $h$ :

- $Z_t \sim \text{AR}(1); Z_t \sim \text{MA}(1)$

$$h = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Tale risultato è perfettamente coerente con la constatazione che, nel caso AR(1),  $\hat{d}^2 \sim \lambda_1 \chi_1^2$ . Infatti, per la v.c  $\chi_g^2$  la trasformazione normalizzante usualmente più accreditata è la radice cubica  $h = 1/3$  (trasformazione di Wilson e Helferty).

- $Z_t \sim \text{AR}(2)$

$$h = 1 - \frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{(\delta_{AR} - 1)}{(\delta_{AR} + 1)^2} \right],$$

dove abbiamo posto

$$\delta_{AR} = \frac{(1 - \phi_2)^2}{\phi_1^2} = \rho(1)^{-2}.$$

Ne consegue che  $\delta_{AR} \in [1, \infty)$ , e

$$\frac{1}{4} \leq h \leq \frac{1}{3};$$

in tal caso, quindi, la trasformazione che riduce l'asimmetria di  $\hat{d}^2$  è compresa tra la radice quarta e la radice cubica. Nella Figura 3 è illustrato l'andamento di  $h$  al variare dei parametri  $\phi_1$  e  $\phi_2$  all'interno della regione ammissibile.

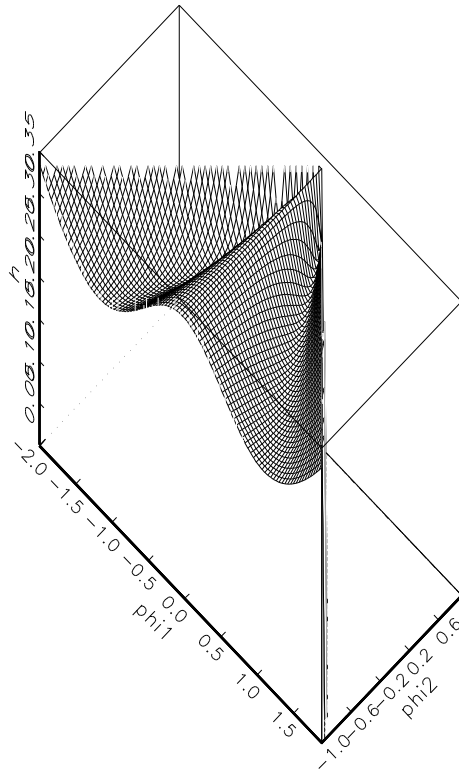


Figura 3. AR(2): andamento di  $h$  al variare di  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

Inoltre, poiché  $\rho(1) = \beta_{AR}$  (paragrafo 2), si ha anche:  $\delta_{AR} = \beta_{AR}^{-2}$ ,  $\beta_{AR} \in [-1, 1]$ . Ne consegue che:

$$\beta_{AR} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Asym(\hat{d}^2) = 2, \\ CV(\hat{d}^2) = 1, \\ h = 1/3. \end{cases}$$

$$\beta_{AR} = \pm 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Asym(\hat{d}^2) = 2\sqrt{2}, \\ CV(\hat{d}^2) = \sqrt{2}, \\ h = 1/3. \end{cases}$$

Emerge, quindi, che in presenza di asimmetria minima ( $Asym = 2$ ) è richiesta la trasformazione più debole ( $h = 1/3$ ). Tuttavia, lo stesso risultato si ottiene anche in corrispondenza dell'asimmetria massima, a causa della diversa velocità di decrescita di asimmetria e coefficiente di variazione in funzione di  $\beta_{AR}$  (Figura 5). Ciò determina un andamento non monotono di  $h$  in funzione dell'asimmetria, per cui la trasformazione più forte ( $h = 1/4$ ) è richiesta quando  $Asym \simeq 2.59$ .

- ARMA(1,1)

$$h = 1 - \frac{2\delta_{ARMA}(4\delta_{ARMA} - 3)}{3(1 - 2\delta_{ARMA})^2},$$

dove abbiamo posto

$$\delta_{ARMA} = \frac{(1 - \phi\theta)^2}{(1 - \phi^2)(1 - \theta^2)} = \beta_{ARMA}^{-1}.$$

L'andamento di  $h$  in funzione dei parametri del modello è illustrato nella Figura 4. In particolare, risulta:  $h(\phi, \theta) = h(-\phi, -\theta)$ , cioè la trasformazione è simmetrica rispetto alla bisettrice degli assi nello spazio parametrico  $(\phi, \theta)$ .

Anche in tal caso risulta

$$\frac{1}{4} \leq h \leq \frac{1}{3};$$

inoltre, essendo  $\beta_{ARMA} \in [0, 1]$ , si ha:

$$\beta_{ARMA} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Asym(\hat{d}^2) = 2\sqrt{2}, \\ CV(\hat{d}^2) = \sqrt{2}, \\ h = 1/3. \end{cases}$$

$$\beta_{ARMA} = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Asym(\hat{d}^2) = 2, \\ CV(\hat{d}^2) = 1, \\ h = 1/3. \end{cases}$$

Quindi, anche per il modello ARMA(1,1) la trasformazione più debole ( $h = 1/3$ ) è richiesta sia in presenza di asimmetria minima che di asimmetria massima, sempre a causa della diversa velocità di decrescita di  $Asym$  e  $CV$  in funzione di  $\beta_{ARMA}$  (Figura 5). Analogamente al caso AR(2), si ha  $h = 1/4$  quando  $Asym \simeq 2.59$ .

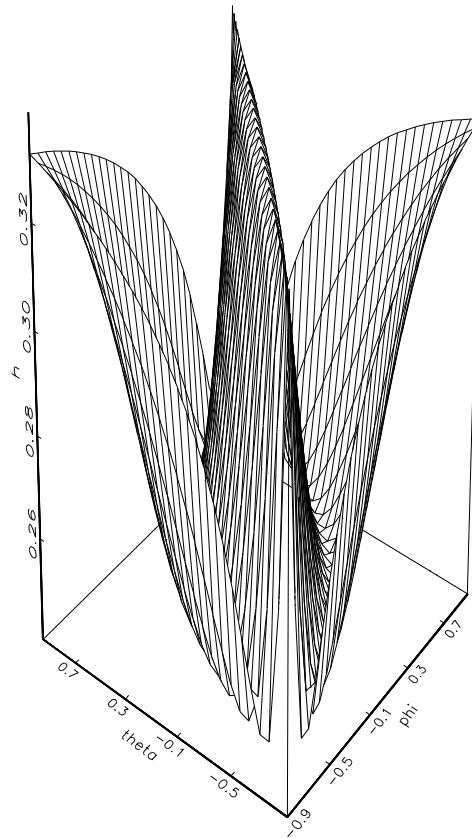


Figura 4. ARMA(1,1): andamento di  $h$  al variare di  $\phi$  e  $\theta$ .

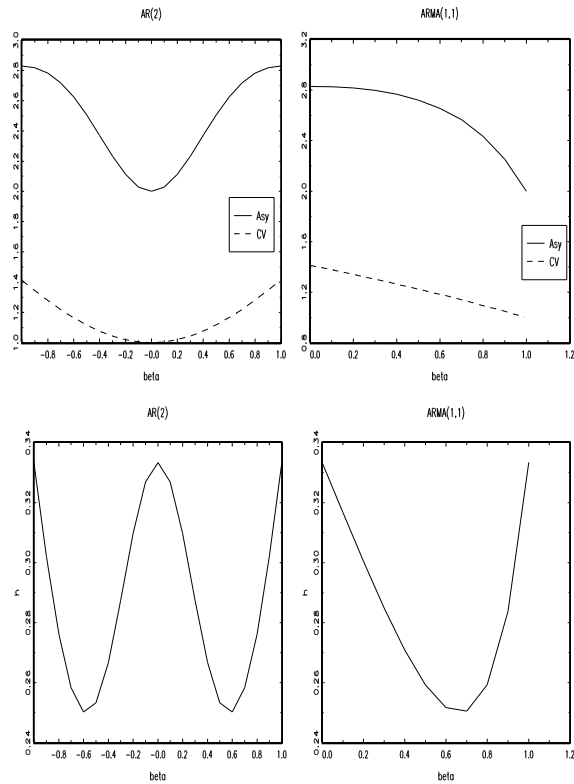


Figura 5.  $AR(2)$  e  $ARMA(1,1)$ : andamento di  $Asym$ ,  $CV$  e  $h$  in funzione di  $\beta_{AR}$  e  $\beta_{ARMA}$ .

### 5. Un esempio su dati simulati

In questo paragrafo mostriamo, mediante l'impiego di dati simulati, l'effetto della trasformazione precedentemente individuata sullo stimatore  $\hat{d}^2$  nel caso di un processo  $Z_t \sim ARMA(1,1)$ .

Lo studio è stato condotto come segue.

1. Si è individuata una griglia di valori per i parametri del modello  $ARMA(1,1)$  e per ogni prefissati  $(\phi, \theta)$  si sono simulate 1000 coppie

$(X_t, Y_t)$  di serie storiche, ciascuna di  $n = 120$  osservazioni.

2. Si è proceduto, quindi, a stimare i modelli ARMA(1,1) a partire da ciascuna delle 2000 serie simulate, ottenendo le rispettive stime di massima verosimiglianza dei parametri.
3. Per ogni coppia  $(X_t, Y_t)$  si è calcolata la metrica AR, che nel caso del modello ARMA(1,1) risulta essere:

$$d^2(X_t, Y_t) = \frac{(\hat{\phi}_x - \theta_x)^2}{1 - \theta_x^2} + \frac{(\hat{\phi}_y - \theta_y)^2}{1 - \theta_y^2} - 2 \frac{(\hat{\phi}_x - \theta_x)(\hat{\phi}_y - \theta_y)}{1 - \theta_x \theta_y}.$$

In tal modo, per ogni  $(\phi, \theta)$ , si sono ottenute 1000 realizzazioni dello stimatore  $\hat{d}^2$ .

4. Si è stimato  $h$  a partire dai valori realizzati per l'asimmetria ed il coefficiente di variazione di  $\hat{d}^2$ . Tale valore  $h_c$  è stato quindi utilizzato per ottenere la trasformazione  $(\hat{d}^2)^{h_c}$ .
5. Si è effettuato, infine, un confronto, in termini di riduzione dell'asimmetria, tra  $(\hat{d}^2)^{h_c}$ ,  $(\hat{d}^2)^h$  e  $(\hat{d}^2)^\lambda$ , dove  $h_c$  è il valore empirico (calcolato sulla base delle simulazioni),  $h$  è il valore teorico (calcolato sulla base delle formule del paragrafo precedente, ipotizzando noto il modello) e  $\lambda$  è il parametro stimato della trasformazione di Box e Cox, mediante il metodo della massima verosimiglianza applicato ai dati simulati dello stimatore  $\hat{d}^2$ .

Nella Tabella 1 sono riportati, per alcune coppie  $(\phi, \theta)$ , i valori dell'asimmetria di  $\hat{d}^2$ ,  $(\hat{d}^2)^{h_c}$ ,  $(\hat{d}^2)^h$ , e  $(\hat{d}^2)^\lambda$ .

Tabella 1. ARMA(1,1): effetto delle trasformazioni sull'asimmetria di  $\hat{d}^2$ .

$\phi$	$\theta$	$Asym(\hat{d}^2)$	$Asym[(\hat{d}^2)^{h_c}]$	$Asym[(\hat{d}^2)^h]$	$Asym[(\hat{d}^2)^\lambda]$
-0.8	-0.8	15.55	2.91	1.88	-0.19
-0.3	-0.8	11.22	0.56	1.91	0.03
0	-0.8	10.20	1.35	1.40	0.03
0.3	-0.8	7.98	0.67	1.69	0.002
0.8	-0.8	12.42	0.14	2.31	0.003
-0.8	-0.3	2.19	0.49	0.14	-0.08
-0.3	-0.3	6.36	3.40	0.92	0.03
0	-0.3	9.53	12.31	1.22	0.03
0.3	-0.3	3.59	-0.25	0.35	0.02
0.8	-0.3	3.28	0.42	0.56	-0.02
-0.8	0	2.99	0.28	0.39	-0.02
-0.3	0	7.10	1.49	0.63	-0.04
0	0	7.68	4.89	1.11	0.05
0.3	0	18.66	31.00	1.03	0.07
0.8	0	2.49	0.57	0.33	-0.03
-0.8	0.3	5.52	1.10	0.70	-0.03
-0.3	0.3	8.05	5.44	0.54	0.01
0	0.3	22.82	13.12	1.89	0.03
0.3	0.3	5.61	1.62	0.96	0.004
0.8	0.3	3.72	-0.63	0.23	-0.01
-0.8	0.8	19.28	0.95	2.68	0.02
-0.3	0.8	8.33	0.31	1.63	0.002
0	0.8	16.84	0.31	2.40	0.01
0.3	0.8	26.62	2.35	2.07	-0.002
0.8	0.8	12.24	13.79	1.34	0.06

L'analisi della tabella mette in luce, innanzitutto, la presenza di valori dell'asimmetria ben superiori a quelli teorici (paragrafo 2). Ciò si giustifica ricordando che, anche per processi ammissibili, è positiva la probabilità di ottenere realizzazioni finite per le quali le stime dei parametri sono non invertibili o prossime alla non invertibilità (Corduas, 1996): in tal caso, la distribuzione simulata di  $\hat{d}^2$  presenta dei valori estremi che, evidentemente, incidono sull'asimmetria.

Le colonne relative alle trasformazioni effettuate con  $h$  calcolato e  $h$  teorico, rispettivamente, evidenziano la forte riduzione che si ottiene per quanto concerne l'asimmetria di  $\hat{d}^2$ . In generale, non emerge una maggiore efficacia di una trasformazione rispetto all'altra, anche se in presenza di valori particolarmente elevati dell'asimmetria la trasformazione effettuata con  $h$  teorico risulta più potente.

In ogni caso, è chiaro che la riduzione dell'asimmetria ottenuta con  $h$  è minore rispetto al risultato cui si perviene applicando ai dati la trasformazione di Box e Cox. Essa, in effetti, costituisce una sorta di standard di riferimento, rispetto alla quale valutare l'efficacia di trasformazioni alternative che, al contrario della trasformazione di Box e Cox, non richiedono la stima del parametro  $\lambda$ . Nel nostro caso, in particolare, noti i valori teorici di  $\phi$  e  $\theta$ , risulta noto (paragrafo 4) anche il valore di  $h$ , che quindi non deve essere stimato a partire dai dati.

Nelle Figure 6 e 7 sono riportati, rispettivamente, gli istogrammi perequati delle distribuzioni empiriche di  $\hat{d}^2$  e  $[\hat{d}^2]^h$ , al variare dei valori dei parametri  $\phi$  e  $\theta$ . In tutti i casi emerge, in modo molto netto, che la trasformazione individuata agisce fortemente sull'asimmetria di  $\hat{d}^2$ , determinando così un deciso miglioramento in termini di approssimazione alla Normalità.

A tal proposito si noti che, anche quando le simulazioni sono ottenute a partire da processi per i quali l'asimmetria teorica di  $\hat{d}^2$  è massima, la trasformazione attuata con  $h = 1/3$  si rivela efficace in termini di riduzione dell'asimmetria (Tabella 2). Ne consegue che la trasformazione individuata (paragrafo 4), anche se ha un comportamento non monotono rispetto all'asimmetria, determina in ogni caso una migliore approssimazione alla v.c. Normale (Figura 8).

Da tali risultati consegue che è possibile utilizzare lo stimatore trasfor-



mato  $[\hat{d}^2]^h$  per ricorrere alla v.c Normale in fase di inferenza sulla metrica AR. In particolare, come discuteremo nel paragrafo successivo, occorre determinare valore medio e varianza dello stimatore trasformato  $[\hat{d}^2]^h$ , al fine di utilizzare i percentili della v.c. Normale standardizzata.

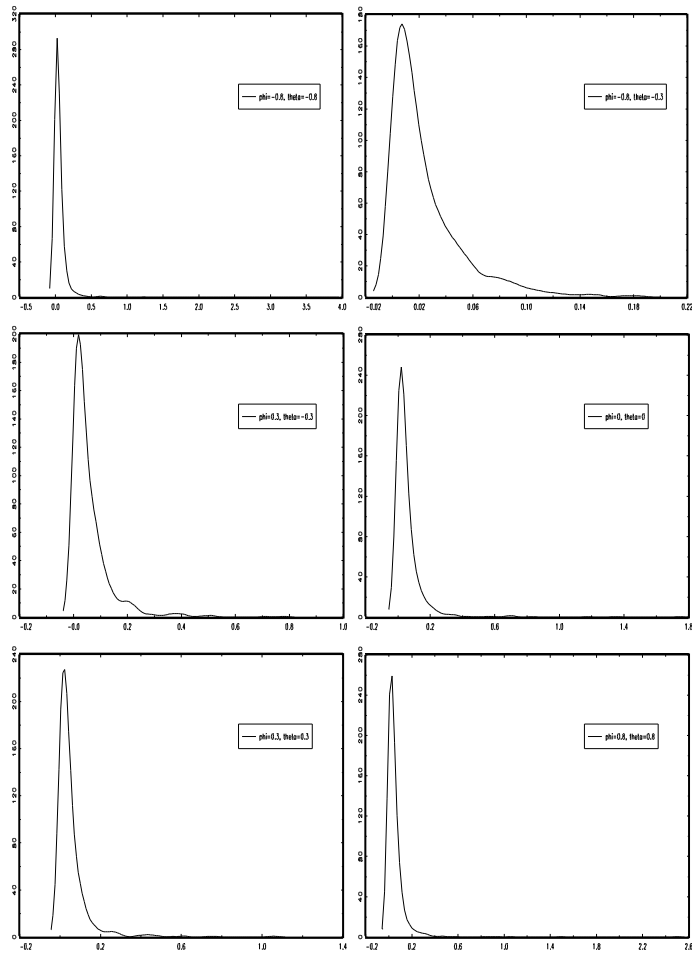


Figura 6. Istogrammi perequati di  $\hat{d}^2$  al variare di  $\phi$  e  $\theta$ .

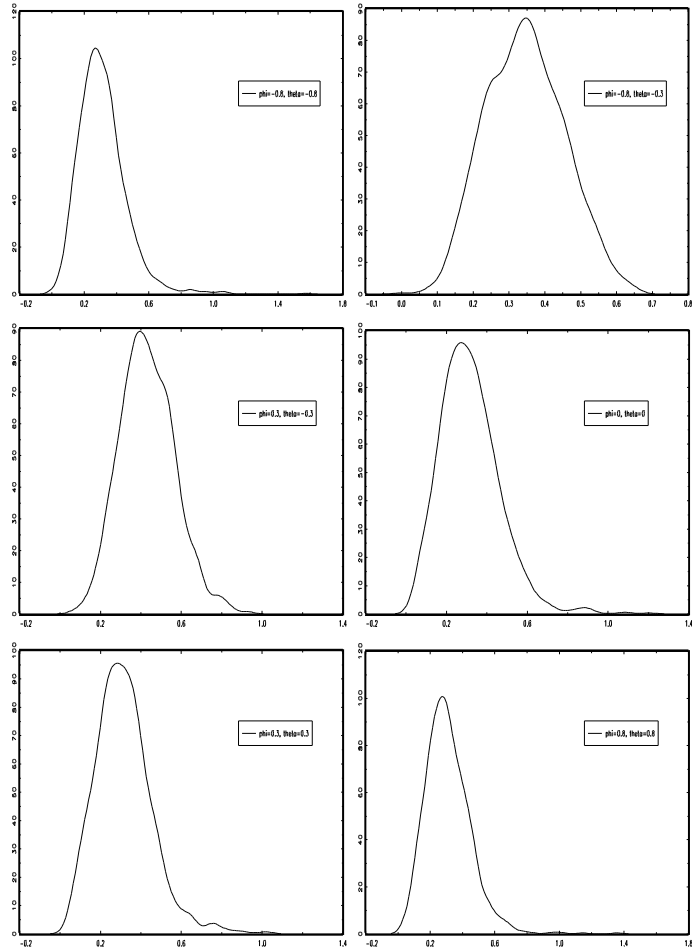


Figura 7. Istogrammi perequati di  $[\hat{d}^2]^h$  al variare di  $\phi$  e  $\theta$ .

Tabella 2. Effetto delle trasformazioni sull'asimmetria di  $\hat{d}^2$ ,  
per valori estremi di  $\phi$  e  $\theta$ .

$\phi$	$\theta$	$Asym(\hat{d}^2)$	$Asym[(\hat{d}^2)^h]$	$Asym[(\hat{d}^2)^{hc}]$	$Asym[(\hat{d}^2)^\lambda]$
-0.99	0.3	3.08	0.46	0.53	-0.10
0.99	0.3	2.74	0.64	0.53	-0.10
0.3	-0.99	4.60	0.79	1.12	0.01
0.3	0.99	4.94	0.67	1.24	0.01

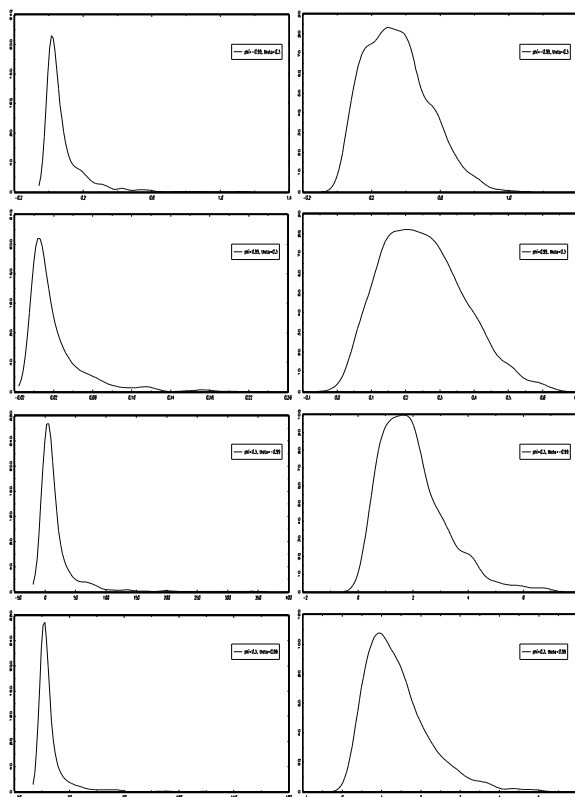


Figura 8. Istogrammi perequati di  $\hat{d}^2$  (sinistra) e  $[\hat{d}^2]^h$  (destra),  
al variare di  $\phi$  e  $\theta$ .

## 6. Valori medi e approssimazione normalizzante

In termini operativi, per poter approssimare la distribuzione di  $[\hat{d}^2]^h$  con quella della v.c. Normale standardizzata, è necessario individuare valor medio e varianza dello stimatore trasformato di  $d^2$ . Infatti:

$$[\hat{d}^2]^h \xrightarrow{as} \mathcal{N}(\mathbb{E}([\hat{d}^2]^h), Var([\hat{d}^2]^h))$$

e pertanto

$$d_Z^2 = \frac{[\hat{d}^2]^h - \mathbb{E}([\hat{d}^2]^h)}{\sqrt{Var([\hat{d}^2]^h)}} \xrightarrow{as} \mathcal{N}(0, 1).$$

Valor medio e varianza approssimati dello stimatore trasformato possono essere ottenuti mediante il metodo delta (Barndorff-Nielsen, 1989, pp. 187-191), che per una v.c.  $X$  con  $\mathbb{E}(X) = \mu$ , porge:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X)] &\simeq g(\mu) + \frac{1}{2} Var(X) g''(\mu), \\ Var[g(X)] &\simeq [g'(\mu)]^2 Var(X). \end{aligned}$$

In particolare, per lo stimatore  $[\hat{d}^2]^h$  ciò implica (nel caso la distanza sia rispetto al modello “vero”):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}([\hat{d}^2]^h) &\simeq [tr(\Omega)]^h \{1 + [ln(tr(\Omega))]^2 tr(\Omega^2)\}, \\ Var([\hat{d}^2]^h) &\simeq 2tr(\Omega^2) \{[tr(\Omega)]^h ln[tr(\Omega)]\}^2. \end{aligned}$$

In tal modo, nota la matrice  $\Omega$  (paragrafo 2), è possibile ottenere valor medio e varianza dello stimatore trasformato della metrica AR che illustriamo per i seguenti modelli specifici:

- AR(1)

$$\mathbb{E}([\hat{d}^2]^h) = \left(\frac{1 - \phi^2}{n}\right)^h \left\{ 1 + \left[ ln\left(\frac{1 - \phi^2}{n}\right) \right]^2 \left(\frac{1 - \phi^2}{n}\right)^2 \right\},$$

$$Var([\hat{d}^2]^h) = 2 \left(\frac{1 - \phi^2}{n}\right)^2 \left\{ \left(\frac{1 - \phi^2}{n}\right)^h \left[ ln\left(\frac{1 - \phi^2}{n}\right) \right] \right\}.$$

- MA(1)

Le espressioni sono analoghe a quelle ottenute per il caso AR(1), sostituendo  $\theta$  al posto di  $\phi$ .

- AR(2)

$$\mathbb{E}([\hat{d}^2]^h) = \left( \frac{2 - 2\phi_2^2}{n} \right)^h \left\{ 1 + \left[ \ln \left( \frac{2 - 2\phi_2^2}{n} \right) \right]^2 \frac{2}{n^2} [(1 - \phi_2^2)^2 + \phi_1^2(1 + \phi_2)^2] \right\},$$

$$Var([\hat{d}^2]^h) = \frac{4^{h+1}}{n^2} [(1 - \phi_2^2)^2 + \phi_1^2(1 + \phi_2)^2] \left[ \left( \frac{1 - \phi_2^2}{n} \right) \right]^{2h} \left[ \ln \left( \frac{2(1 - \phi_2^2)}{n} \right) \right]^2.$$

- ARMA(1,1)

$$\mathbb{E}([\hat{d}^2]^h) = \left\{ \frac{2}{n} \left( \frac{1 - \phi\theta}{1 - \theta^2} \right)^2 \right\}^h \left\{ 1 + \frac{2}{n^2} A \left[ \ln \left[ \frac{2}{n} \left( \frac{1 - \phi\theta}{1 - \theta^2} \right)^2 \right] \right]^2 \right\},$$

$$Var([\hat{d}^2]^h) = \frac{4^{h+1}}{n^2} A \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{1 - \phi\theta}{1 - \theta^2} \right)^2 \right]^{2h} \left[ \ln \left( \frac{2}{n} \left( \frac{1 - \phi\theta}{1 - \theta^2} \right)^2 \right) \right]^2,$$

avendo posto

$$A = \frac{(1 - \phi\theta)^2}{(1 - \theta^2)^3} \left[ \frac{2(1 - \phi\theta)^2}{1 - \theta^2} - (1 - \phi^2) \right].$$

In generale, poiché sia  $\mathbb{E}([\hat{d}^2]^h)$  che  $Var([\hat{d}^2]^h)$  sono funzione di  $tr(\Omega)$ , che non sempre è facilmente derivabile sul piano analitico, si rende opportuno il ricorso ad un algoritmo di calcolo di  $tr(\Omega)$ , recentemente proposto in generale per i modelli ARIMA (Corduas, 2000).

## 7. Il modello *Airline*

Una delle utilizzazioni più operative della metrica AR è quella di individuare la migliore procedura di destagionalizzazione per ciascun modello. Infatti, una procedura può essere ritenuta idonea a destagionalizzare una serie storica soltanto se non è significativa la distanza tra il modello stimato a partire dalla serie osservata e il modello teorico  $M_0$  per il quale è noto che la procedura è adeguata (Piccolo, 1999).

A tal proposito, va ricordato che spesso (Findley e Monsell, 1995; Maravall e Gomez, 1994), per ragioni di semplicità ed interpretabilità, nonché di elevata frequenza nelle applicazioni reali, il modello stagionale di riferimento per le procedure di destagionalizzazione è il cosiddetto modello *Airline* (Box e Jenkins, 1970):  $Z_t \sim \text{ARIMA}(0,1,1)(0,1,1)_s$ , ovvero, esplicitamente:

$$\nabla \nabla_s Z_t = (1 - \theta B)(1 - \Theta B^s) a_t$$

che è completamente caratterizzato dai due parametri MA ( $\theta, \Theta$ ), oltre che dalla varianza  $\sigma^2$  del processo  $a_t$ .

Per il ruolo svolto nella pratica della destagionalizzazione, ci sembra utile individuare anche per il modello *Airline* una trasformazione che riduca l'asimmetria dello stimatore della metrica AR.

A tal proposito, si noti che la complessità degli sviluppi necessari ad ottenere la matrice  $\Omega$  e quindi l'espressione dell'asimmetria di  $\hat{d}^2$  inducono a proporre una soluzione di natura computazionale. In particolare, si può ricorrere ad un algoritmo per il calcolo di  $\text{tr}(\Omega^c)$ ,  $c = 1, 2, 3$ , (Corduas, 2000).

In questo lavoro, invece, abbiamo individuato empiricamente, mediante simulazioni, il valore dell'asimmetria e del coefficiente di variazione di  $\hat{d}^2$  per un modello particolare (prescelto tra quelli più diffusi), e il corrispondente  $h$ .

A tal fine si consideri un modello *Airline* con  $\theta = 0.5$  e  $\Theta = 0.4$ . Abbiamo generato da tale modello 5000 serie di 120 osservazioni e per ciascuna di essa abbiamo ottenuto le stime di massima verosimiglianza dei due parametri. Infine, abbiamo calcolato la distanza  $d^2$  tra ogni modello stimato ed il modello vero.

La distribuzione empirica dello stimatore  $\hat{d}^2$  presenta un coefficiente di asimmetria pari a 2.536 e un coefficiente di variazione pari a 1.116. Ne consegue che:

$$\hat{h} = 1 - \frac{\widehat{Asym}}{3\widehat{CV}} = 1 - \frac{2.537}{3 * 1.116} = 0.242.$$

In tal caso, il valore ottenuto è molto vicino alla stima di  $\lambda$  che si ottiene mediante il ricorso alla trasformazione di Box e Cox:  $\hat{\lambda} = 0.22$ . Difatti, la distribuzione dello stimatore trasformato  $(\hat{d}^2)^h$  approssima abbastanza bene quella di una v.c. Normale (Figura 9), riducendo il valore dell'asimmetria della distribuzione trasformata a 0.036. Si noti, inoltre, che la trasformazione ottenuta (in pratica, la radice quarta) coincide con la più forte trasformazione teorica individuata per i modelli AR(2) e ARMA(1,1), come è emerso nel paragrafo 4.

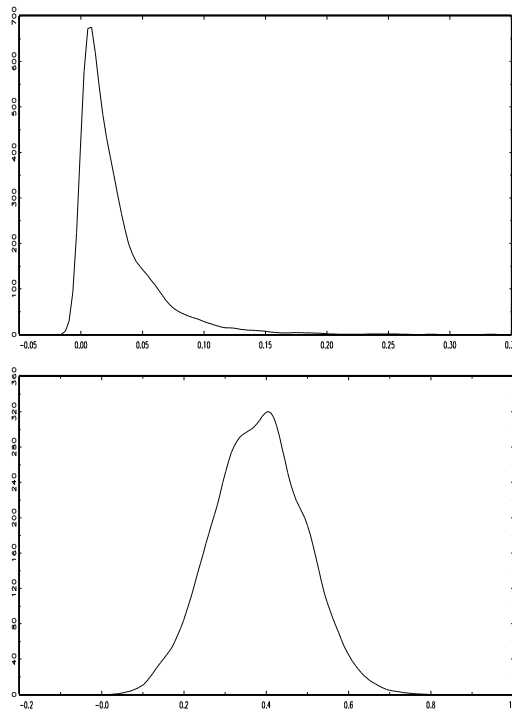


Figura 9. Modello Airline: istogrammi perequati di  $\hat{d}^2$  e  $[\hat{d}^2]^h$ .

## 8. Considerazioni finali

Sulla base dei risultati ottenuti è possibile delineare una procedura operativa che consenta di condurre un'inferenza di tipo asintotico sulla metrica AR.

Infatti, per alcune specificazioni modellistiche è stata individuata la trasformazione da applicare alla distanza  $d^2$  al fine di poterla approssimare ad una v.c. Normale standardizzata. In particolare è emerso che, per i modelli esaminati, la trasformazione che riduce l'asimmetria è compresa tra la radice quarta e la radice terza: quest'ultima ( $h = 1/3$ ) è richiesta per processi  $Z_t \sim \text{AR}(1)$ , per  $Z_t \sim \text{MA}(1)$ , per  $Z_t \sim \text{AR}(2)$  in presenza di radici unitarie, e per  $Z_t \sim \text{ARMA}(1,1)$  con radici unitarie o quando il processo è White Noise.

Inoltre, per ciascuna specificazione sono state ricavate le espressioni di valor medio e varianza dello stimatore trasformato della metrica AR, in modo da poter utilizzare i percentili della v.c. Normale standardizzata, per costruire intervalli di confidenza o effettuare test delle ipotesi.

In generale, poiché la trasformazione individuata è basata sulla conoscenza dell'asimmetria e del coefficiente di variazione di  $\hat{d}^2$  (entrambi funzione di  $tr(\Omega)$ ), emerge la seguente strategia operativa:

1. ottenere, analiticamente o mediante un algoritmo di calcolo,  $tr(\Omega^c)$  ( $c = 1, 2, 3$ ), e quindi il valore di  $h$ , ipotizzando noto il modello;
2. applicare la trasformazione  $T(\hat{d}^2): \hat{d}^2 \rightarrow [\hat{d}^2]^h$ ;
3. ottenere, mediante  $tr(\Omega^c)$  ( $c = 1, 2, 3$ ), e il metodo delta, valor medio e varianza dello stimatore trasformato  $[\hat{d}^2]^h$ ;
4. utilizzare lo stimatore trasformato standardizzato  $d_Z^2 \xrightarrow{as} \mathcal{N}(0, 1)$  per fare inferenza sulla metrica AR.



*Ringraziamenti:* Il lavoro ha beneficiato di contributi derivanti da progetti di ricerca MURST, di Ateneo e di interesse nazionale, afferenti al Dipartimento di Scienze Statistiche dell'Università di Napoli Federico II.

### **Riferimenti bibliografici**

Barndorff-Nielsen O. E. (1989) *Asymptotic Techniques for Use in Statistics*, Chapman and Hall, New York.

Box G. E. P. and Cox D. R. (1964) An analysis of transformations, *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 26, 211-252.

Box G. E. P. and Jenkins G.M. (1970) *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, S.Francisco.

Corduas M. (1992) *Misure di distanza tra serie storiche e modelli parametrici*, Quaderni dell'Istituto Economico Finanziario, Università di Napoli Federico II.

Corduas M. (1996) Uno studio sulla distribuzione asintotica della metrica Autoregressiva, *Statistica*, LVI, 321-332.

Corduas M. (2000) La metrica Autoregressiva tra modelli ARIMA: una procedura operativa in linguaggio GAUSS, *Quaderni di Statistica*, questo volume.

Corduas M. and Piccolo D. (1999) On the use of the AR metric for seasonal adjustment, *CLADAG 99*, Roma, 1-4.

Findley D. F. and Monsell B. (1995) *X-12-ARIMA Reference Manual, Beta Version 1.0*, Bureau of the Census, Washington D.C.

Hall P. (1992) On the removal of skewness by transformation, *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 54, 221-228.

Hinkley D. V. (1975) On power transformations to symmetry, *Biometrika*, 62, 101-111.

Jensen D. R. and Solomon H. H. (1972) A Gaussian approximation to the distribution of a definite quadratic form, *Journal of the American Statistical Association*, 67, 898-902.

Johnson N. J. (1978) Modified *t* tests and confidence intervals for asymmetrical populations, *Journal of the American Statistical Association*

tion, 73, 536-544.

Maharaj E. A. (1996) A significance test for classifying ARMA models, *Journal of Statistical Computations and Simulation*, 54, 305-331.

Maravall A. and Gomez V. (1994) *Program SEATS: Signal Extraction in ARIMA Time Series. Instructions for the User*, Working Paper 94/28, European University Institute, Fiesole.

Mathai A. M. and Provost S. B. (1992) *Quadratic forms in random variables*, Dekker Inc., New York.

Pace L. e Salvan A. (1996) *Teoria della Statistica*, CEDAM, Padova.

Piccolo D. (1984) Una topologia per la classe ARIMA, *Statistica*, XLIV, 47-59.

Piccolo D. (1989) On a measure of dissimilarity between ARIMA models, *Proceedings of the ASA Meetings, Business and Economic Statistics Section*, Washington D.C.

Piccolo D. (1990) A distance measure for classifying ARIMA models, *Journal of Time Series Analysis*, 11, 153-164.

Piccolo D. (1999) Orientamenti e contributi della metodologia statistica per l'analisi congiunturale, *Annali di Statistica*, Serie X, 17, ISTAT, 9-38.

Sutton C. D. (1993) Computer-intensive methods for tests about the mean of an asymmetrical distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 88, 802-810.