

## Modelli non lineari e previsioni in tempo reale

Alessandra Amendola, Cosimo Vitale

Università di Salerno, Dipartimento di Scienze Economiche, sez. Statistica  
E-mail: [alamendola@unisa.it](mailto:alamendola@unisa.it), [vitale@unisa.it](mailto:vitale@unisa.it);

*Summary:* In this paper we investigate the forecasting performance of non-linear models. In particular we are interested in real-time forecasts of physical and economic phenomena. A proposal of a parametric non-linear model and some empirical evidence on its predictive ability are presented.

*Keywords:* Forecasts, Non-linear time series, Threshold, Bilinear.

### 1. Introduzione

Il problema che si intende affrontare in questo lavoro è quello della previsione tramite modelli statistici non lineari applicati a fenomeni fisici evolvanti nel tempo ed in particolare a fenomeni idrologici, come le portate di fiumi con piccoli bacini (inferiore ai 1000 km<sup>2</sup>). L'utilità immediata di queste previsioni in tempo reale è legata alla possibilità del preannuncio di eventi particolarmente dannosi, in modo tale da approntare le necessarie misure di tutela e messa in sicurezza delle popolazioni che possono esserne coinvolte.

Se indichiamo con  $Y_t$ ,  $t=1, 2, \dots, N$ , le  $N$  osservazioni consecutive effettuate su un dato fenomeno, ad esempio idrologico, il problema consiste nel *prevedere*  $Y_{N+h}$ ,  $h=1, 2, \dots$ , sulla base delle informazioni,  $I_N$ , che si hanno fino ad  $N$  sul fenomeno  $Y$  e su fenomeni ad  $Y$  collegati. Se indichiamo con  $Y_N(h)$  la previsione di  $Y_{N+h}$  sembra ovvio determinare  $Y_N(h)$  in modo che

$Y_N(h)$  abbia *distanza minima* da  $Y_{N+h}$ .

Se come *distanza* consideriamo quella euclidea è ben noto che in tal caso risulta:

$$Y_N(h) = E[Y_{N+h}/I_N]$$

il problema consiste nell'individuare una stima *accettabile* di questo valor medio.

Osserviamo che, nota la previsione  $Y_N(h)$  si può derivare, sotto ipotesi più o meno restrittive a secondo della struttura probabilistica di  $Y_t$  :

- l'errore di previsione  $e_t(h) = Y_N(h) - Y_{N+h}$ ,
- la varianza di previsione  $s_e^2(t, h) = E[e_t^2(h)]$
- la distribuzione, quantomeno asintotica, di  $e_t(h)$ .

Un modo per capire se una stima è *attendibile* è di derivare la distribuzione esatta o approssimata dell'errore di previsione e dalle sue caratteristiche inferire sull'accettabilità o meno della previsione ottenuta.

Nella pratica, esistono diversi approcci alla costruzione di una stima della previsione e alla derivazione della distribuzione degli errori di previsione:

- a) approccio *non parametrico*
- b) approccio *parametrico*
- c) approccio *semi parametrico*.

Il lavoro è così articolato. Il paragrafo 2 è dedicato ad alcuni cenni sull'approccio non parametrico delle serie storiche. Il paragrafo 3 tratta del caso parametrico, in questo paragrafo vengono brevemente illustrati alcuni dei modelli non lineari che possono essere utili per le previsioni di fenomeni idrologici ed in particolare per le portate dei fiumi. Una proposta di modello parametrico viene presentata nel paragrafo 4 insieme con una valutazione empirica su dati reali.

## **2. Approccio non parametrico**

Nel contesto non parametrico il modello funzionale per  $Y$  non è specificato se non nelle sue grandi linee. Una formulazione

abbastanza generale che permette di ottenere buoni risultati in molti casi è la seguente:

$$Y_t = f(\mathbf{Y}_{t-p}, \mathbf{X}_{t-q}) + g(\mathbf{Y}_{t-h}, \mathbf{X}_{t-k})\mathbf{e}_t$$

*Assunzioni:*

- $\mathbf{Y}_{t-s} = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-s})$  è la variabile endogena ritardata,
- $\mathbf{X}_{t-s} = (X_{t-1}, \dots, X_{t-s})$  sono le variabili esogene ritardate,
- $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  sono funzioni incognite con  $g(\cdot) > 0$ ,
- $\mathbf{e}_t$  processo white noise gaussiano,  $WNN(0, \mathbf{S}_e^2)$ , indipendente

dalle endogene ed esogene ritardate,

- $f(\mathbf{z}) = \mathbf{a}'\mathbf{z} + o(\|\mathbf{z}\|)$  per  $(\|\mathbf{z}\|) \in \mathbb{R}^n$ ,
- $f(\cdot)$  limitata in un compatto,
- $1 - a_1z - a_2z^2 - \dots - a_rz^r = 0$ , con  $r = p+k$ , ha tutte le  $p+k$  radici fuori dal cerchio unitario,
- $g(\cdot)$  ha proprietà simili a quelle assunte per  $f(\cdot)$ .

Sotto le *Assunzioni* sopra specificate si può dimostrare (vedi Tølstejn, 1995) che  $Y_t$  è:

- stazionario in senso forte,
- geometricamente ergodico,
- fortemente  $\alpha$ -mixing,
- sulle stime è possibile utilizzare il teorema del limite centrale.

Le procedure di stima che sono state utilizzate per derivare  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $h$ ,  $k$ ,  $\mathbf{S}_e^2$  sono numerose, qui si elencano quelle più studiate ed applicate:

- le spline
- le reti neurali
- il metodo del kernel.

E' utile osservare che è

$$\hat{Y}_t(1) = \hat{E}(Y_{t+1} | I_t) = \hat{f}(Y_t, \dots, Y_{t-p+1}, X_t, \dots, X_{t-q+1})$$

che rappresenta la non linearità in livello del fenomeno, mentre risulta

$$\hat{\mathbf{S}}_e^2(t,1) = \hat{\text{var}}(Y_t | I_t) = \hat{g}^2(Y_t, \dots, Y_{t-h+1}, X_t, \dots, X_{t-k+1})$$

che rappresenta la non linearità in varianza del fenomeno.

Le procedure di smoothing, illustrate graficamente nella figura 1, sostituiscono a ciascun valore osservato  $Y_{t_0}$  una media ponderata, con una qualche funzione peso, dei valori in un intorno di  $t_0$ . Queste procedure presentano alcuni inconvenienti ed in particolare:

- sono utili per ottenere uno smoothing dei valori osservati, lo sono molto meno per costruire previsioni ad uno o più passi in avanti,
- sono poco utili ai fini del controllo del sistema e per effettuare simulazioni,
- le stime  $\hat{f}()$  e  $\hat{g}()$  risultano, in molti casi, di difficile interpretazione.

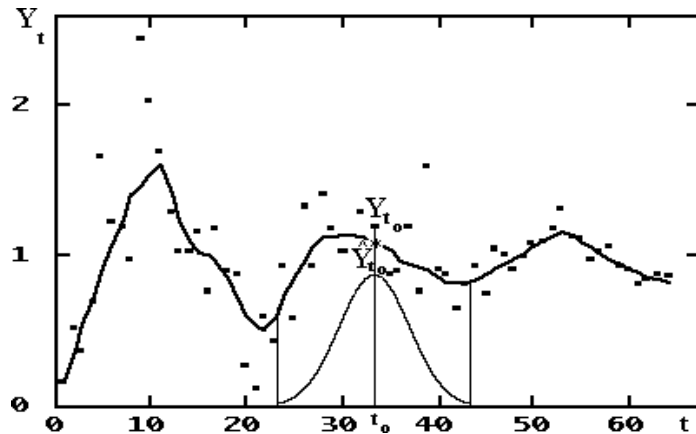


Figura 1 Schematizzazione della stima con metodi non parametrici

### 3. Approccio parametrico

L'approccio parametrico è quello che più frequentemente viene utilizzato specie quando, oltre alla costruzione di previsioni "ottimali", è necessario simulare scenari. In questo caso  $f()$  e  $g()$  sono funzioni note, in qualche prefissata classe, a meno di un numero finito di parametri. In tali situazioni si parla anche di modelli per serie storiche.

### 3.1 Il modello lineare

Nell'ambito delle analisi di serie storiche, il modello lineare coincide di fatto, anche se in teoria la classe dei lineari è più ampia, con la classica modellistica ARMA(p, q) di Box-Jenkins:

$$Y_t = \sum_{i=1}^p f_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^q q_j e_{t-j} + e_t$$

ove  $f_i$  e  $q_j$  sono  $p+q$  parametri incogniti da stimare, mentre  $e_t$  è un processo gaussiano con valore medio nullo, varianza  $\sigma^2$  costante ed a componenti incorrelate. In questo caso il problema è completamente risolto. Infatti, è abbastanza agevole dimostrare che la previsione ottimale di  $Y_{t+1}$ , date le informazioni  $I_t$ , è data da un particolare filtro lineare asimmetrico di  $Y_t$ , in particolare la previsione ottimale un passo in avanti è data da

$$Y_t(1) = \mathbf{j}(B)Y_t$$

ove:

- a)  $B$  è l'operatore ritardo tale che  $BY_t = Y_{t-1}$ ,
- b)  $\mathbf{j}(B)$  è il filtro ottimale dato da

$$\mathbf{j}(B) = \frac{\mathbf{q}(B) - \mathbf{f}(B)}{\mathbf{q}(B)},$$

- c) mentre si è posto

$$\mathbf{f}(B) = (1 - f_1 B - f_2 B^2 - \dots - f_p B^p),$$

$$\mathbf{q}(B) = (1 - q_1 B - q_2 B^2 - \dots - q_q B^q),$$

- d) le  $q$  radici del polinomio  $\mathbf{q}(B)=0$  si suppongono tutte fuori del cerchio unitario, cioè  $Y_t$  è invertibile.

Osserviamo che la condizione di invertibilità è essenziale, anche in contesti non lineari, per ottenere previsioni accettabili. Infatti, dalla struttura di  $\mathbf{j}(B)$  emerge chiaramente che se il processo non fosse invertibile le previsioni sarebbero funzione dei valori iniziali usati per costruirle iterativamente.

### 3.2 Il caso non lineare

La non linearità è più complessa da definire della linearità e spesso viene riportata come negazione della linearità: una struttura dinamica è non lineare se non è esprimibile come un ARMA. In realtà, i modelli lineari sono più generali della classe ARMA, per esempio i modelli lineari a lunga memoria non sono esprimibili con un ARMA con numero di parametri finito.

D'altro lato, i processi ed i connessi modelli lineari o linearizzabili non sono in grado di catturare particolari strutture come asimmetrie, curtosi, cicli limiti, presenti in alcuni fenomeni reali e quindi risulta indispensabile ricorrere a strutture dinamiche non lineari. Per meglio illustrare i relativi concetti riportiamo, qui di seguito, due semplici esempi di strutture dinamiche deterministiche, complessivamente non lineari ma localmente tali, capaci di descrivere comportamenti molto complessi.

#### Esempio 1

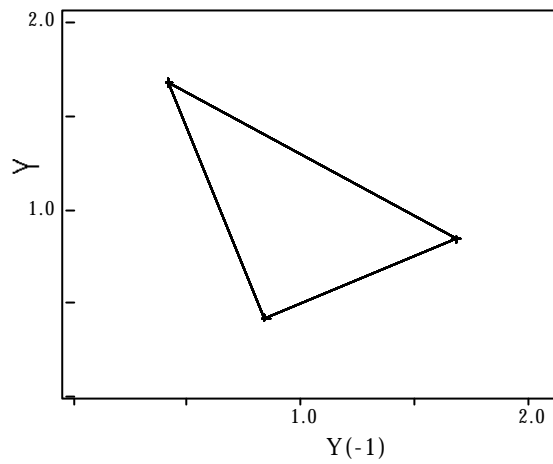
Consideriamo la seguente struttura dinamica deterministica lineare a tratti

$$Y_t = \begin{cases} 4Y_{t-1} & \text{se } |Y_{t-1}| \leq 1/2 \\ Y_{t-1}/2 & \text{se } |Y_{t-1}| > 1/2 \end{cases}$$

Partendo dal valore iniziale  $Y_0 = 0.21$  le osservazioni dalla 2° alla 16° sono:

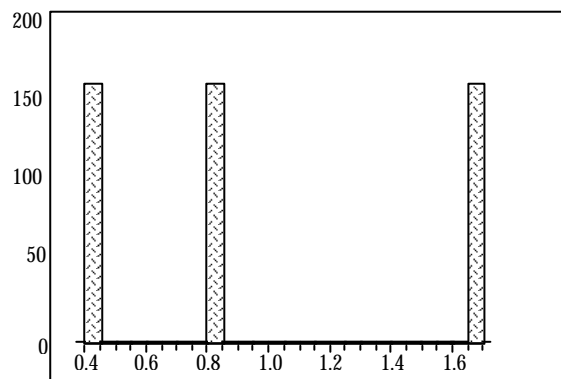
<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
0.42	0.84	1.68	0.42	0.84	1.68	0.42	0.84
<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	
1.68	0.42	0.84	1.68	0.42	0.84	1.68	

Nella figura 2 è riportato lo scattergramma  $(Y_t, Y_{t-1})$  e come si vede il sistema è perfettamente ciclico con periodo pari a tre.



*Figura 2. Scattergramma del sistema*

A conferma di quanto detto, nella figura 3 è riportato l'istogramma di frequenza. E' interessante notare che, al variare del valore iniziale  $Y_0$  nell'intervallo  $[-1, 1]$ , variano i valori assunti dalla corrispondente serie ma questa rimane sempre periodica di periodo 3 ed anche la struttura delle due figure riportate rimane identica.



*Figura 3. Istogramma di frequenze*

### Esempio 2

Consideriamo il seguente sistema dinamico deterministico lineare a tratti

$$Y_t = \begin{cases} 5Y_{t-1}/2 & \text{se } 0 \leq Y_{t-1} < 2/5 \\ 5/3 - 5Y_{t-1}/3 & \text{se } 2/5 \leq Y_{t-1} \leq 1 \end{cases}$$

con valore iniziale  $Y_0$  tale che sia  $Y_0 < 2/5$ . Se si sceglie  $Y_0 = 0,19$  si ottiene una serie storica con valori completamente erratici e simile a quella attesa da un processo stocastico stazionario in cui non si intravede una qualche regolarità. Le prime 11 osservazioni a partire da  $Y_0 = 0,19$  sono riportati qui di seguito.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
0,475	0,875	0,208	0,521	0,798	0,335
<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	
0,839	0,268	0,670	0,549	0,751	

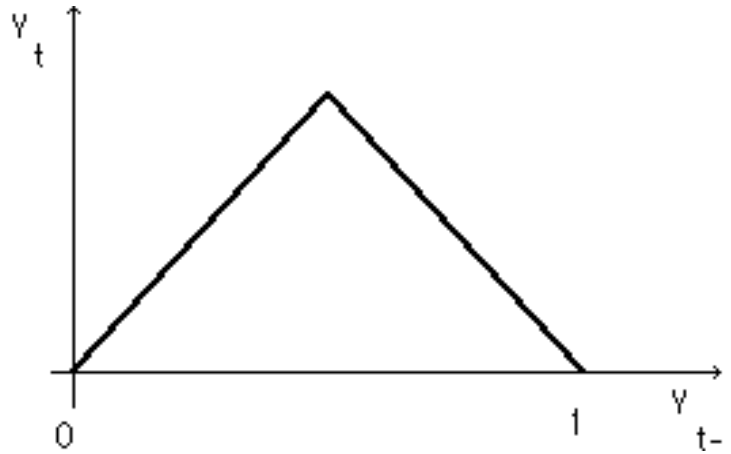
D'altro lato, è facile verificare che le autocorrelazioni di questa struttura dinamica sono le stesse di quelle che si otterrebbero dall'ARMA(1, 0)

$$Y_t = -0,2Y_{t-1} + \mathbf{e}_t$$

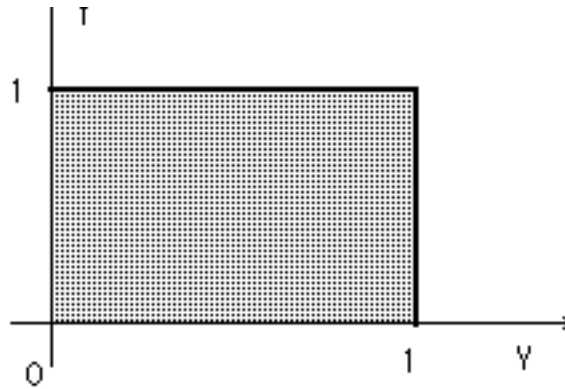
e quindi, se non si conosce l'origine della serie storica, questa potrebbe essere confusa con una traccia generata dall'ARMA(1, 0) prima richiamato.

Lo scatter  $(Y_t, Y_{t-1})$  ed il relativo istogramma di frequenze sono riportate, rispettivamente, nelle figure 4 e 5 che mettono in evidenza come la struttura ARMA sia non adeguata a rappresentare il fenomeno dinamico considerato.





*Figura 4. Scattergramma del modello dinamico*



*Figura 5. Istogramma del modello dinamico*

Inoltre, il modello descrive una struttura evolutiva molto complessa che può essere facilmente scambiata per quella generata da un processo stocastico. Osserviamo che, partendo da valori iniziali diversi, gli andamenti delle figure 4 e 5 rimangono immutati, inoltre, l'istogramma descritto nella figura 5 può essere assimilato ad una distribuzione di probabilità. Più precisamente, se il valore iniziale è

scelto a caso, la figura 5 rappresenta la probabilità che il sistema assuma un valore in ogni sotto insieme di (0, 1).

### 3.3 I modelli soglia

Il passaggio da semplici sistemi deterministici non lineari che descrivono strutture complesse a sistemi stocastici non lineari diviene immediato, infatti sulla scorta degli esempi precedenti si possono definire modelli non lineari globalmente ma lineari localmente ed in particolare con struttura a tratti di tipo AR. Questi modelli sono stati proposti e studiati in vari lavori da Tong (per una rassegna, Tong 1990). Attualmente ne esistono diverse applicazioni a fenomeni sia fisici che economici (vedi, fra gli altri: Tsay 1989, Krager 1993, Montgomery 1998).

#### Esempio 3

Una generalizzazione di tipo stocastico degli esempi 2 e 3 è data dal seguente modello a due regimi con una soglia,  $s=1$ :

$$Y = \begin{cases} c_1 + \mathbf{f}_1^1 Y_{t-1} + \mathbf{f}_2^1 Y_{t-2} + \mathbf{b}_1^1 X_{t-1} + \mathbf{e}_t^1 & \text{se } Z_{t-d} < r \\ c_2 + \mathbf{f}_1^2 Y_{t-1} + \mathbf{f}_2^2 Y_{t-2} + \mathbf{f}_3^2 Y_{t-3} + \mathbf{b}_1^2 X_{t-1} + \mathbf{e}_t^2 & \text{se } Z_{t-d} \geq r \end{cases}$$

Come si può notare, nel modello sono state, oltre alla linearità a tratti, introdotti:

- e) i processi white noise per ciascun regime,
- f) una processo esogeno  $X$  stazionario
- g) la variabile esogena  $Z$  stazionaria con densità spettrale continua
- h) il valore soglia  $r$
- i) il ritardo  $d$  della variabile soglia.

Le caratteristiche sopra riportate rendono questa classe di modelli molto flessibili ed adattabili a numerosi fenomeni reali.

Ovviamente, almeno da un punto di vista teorico, è possibile definire modelli con un numero arbitrario di regimi e di variabili

esogene che possono essere diverse da un regime all'altro. Nelle pratiche applicazioni i regimi di rado sono più di tre, inoltre la variabile soglia può coincidere con ritardate di  $Y$  o di  $X$  o di una loro funzione nota. Spesso queste caratteristiche sono derivate dal modello concettuale che caratterizza il fenomeno oggetto di studio. Osserviamo ancora, che per  $s=0$  si ha il classico modello lineare.

I modelli soglia possono essere generalizzati al caso multivariato:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{c}_j + \sum_{i=1}^{p_j} \Phi_i^j \mathbf{Y}_{t-i} + \sum_{h=1}^{q_j} \mathbf{B}_h^j \mathbf{X}_{t-h} + \mathbf{e}_t^j \quad \text{se}$$

$$r_{j-1} \leq Z_{t-d} < r_j, \text{ per } j = 1, 2, \dots, s$$

ove:

- a)  $\mathbf{Y}, \mathbf{X}$ , sono processi vettoriali stazionari in ogni regime,
- b)  $\mathbf{c}_j$  sono vettori di costanti incognite da stimare,
- c)  $\mathbf{F}, \mathbf{B}$  matrici di costanti incognite da stimare,
- d)  $\mathbf{e}$  white noise vettoriale.

In pratica i modelli soglia multivariati sono raramente usati data la difficoltà della loro identificazione, mentre una certa diffusione hanno avuto quelli univariati in cui la variabile soglia è la ritardata del fenomeno in studio, in tal caso si parla di modelli SETAR (Tong, 1983). Per la loro applicazione pratica è necessario affrontare e risolvere, in generale con procedure iterative di tipo prova ed errore, una serie di problemi statistico-matematici.

Qui di seguito vengono elencati brevemente quelli più rilevanti:

- a) costruire dei test di linearità del tipo

$$H_0: s=0 \quad \text{verso} \quad H_1: s>0,$$

se si rifiuta  $H_0$  il numero delle soglie viene individuato sia utilizzando una procedura iterativa, sia ricorrendo all'eventuale modello concettuale che soggiace al fenomeno in studio;

- b) individuare la variabile soglia  $Z$  che, di solito, viene identificata ricorrendo al modello concettuale oppure ad una qualche funzione della  $Y$  ritardata;

- c) stimare il ritardo  $d$  e le soglie  $r_j$ ; per far questo si ricorre a

procedure iterative;

d) stimare i parametri incogniti e validare il modello.

Più precisamente, lo strumento operativo per identificare il modello e stimarne i parametri incogniti è la *regressione riordinata* rispetto alla variabile  $Z$  scelta come soglia. Per capire come opera questo strumento supponiamo che nel modello via sia una sola soglia ( $s=1$ ) e quindi due regimi. Inoltre, supponiamo che sia vera  $H_0: s=0$  (si accetta l'ipotesi di linearità) in queste condizioni il modello si può anche scrivere

$$Y_t = \mathbf{X}_t' \Phi + \mathbf{e}_t, t = h+1, h+2, \dots, N$$

ove si è posto

$$h = \max(p, d, q)$$

$$\mathbf{X}_t' = (1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}, X_{t-1}, \dots, X_{t-q})$$

$$\Phi' = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_q)$$

in tal caso le stime LS di  $\mathbf{F}$ , diciamo  $\hat{\Phi}$ , sono non distorte e consistenti ed i residui stimati

$$\hat{\mathbf{e}}_t = Y_t - \mathbf{X}_t' \hat{\Phi}$$

sono incorrelati con i regressori.

Bisogna ora individuare una procedura che ci permetta di rigettare  $H_0$ . Per far questo utilizziamo la regressione riordinata procedo secondo lo schema seguente:

dati i tempi t:	1	2	3	...	...	N
le osservazioni:	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	...	...	$Z_N$
le osservazioni ordinate:	$Z_{(1)}$	$Z_{(2)}$	$Z_{(3)}$	...	...	$Z_{(N)}$
i tempi corrispondenti:	$t_{(1)}$	$t_{(2)}$	$t_{(3)}$	...	...	$t_{(N)}$

utilizziamo le osservazioni di  $Y$  e di  $X$  riordinate secondo la  $Z$  crescente:

	$Y_{(1)}$	$Y_{(2)}$	...	...	$Y_{(m)}$
	$\mathbf{X}_{(1)}$	$\mathbf{X}_{(2)}$	...	...	$\mathbf{X}_{(m)}$
relative ai tempi	$t_{(h+1)}$	$t_{(h+2)}$	...	...	$t_{(h+m)}$

e costruiamo il modello di regressione riordinata:

$$Y_{(i)} = \mathbf{X}'_{t_{(i)}} \Phi + \mathbf{e}_{t_{(i)}}, \text{pert}_{(i)} = h+1, \dots, h+m$$

Se  $H_0$  è vera (cioè il modello è lineare) la stima di  $\Phi$  dovrebbe essere molto simile a quella del modello completo. La verifica per stabilire se i due modelli sono simili è fatta ricorrendo al criterio AIC di Akaike:

$$AIC(k) = N \log(\hat{\mathbf{S}}_e^2) + 2k$$

ove si è posto  $k=N$ -numero dei parametri stimati.

La procedura sopra sintetizzata viene ripetuta per una griglia di  $d$  ed  $m$  ed il modello finale scelto è quello che rende minimo il criterio AIC. Tsay (1998), in un lavoro pubblicato su JASA, dimostra che le stime così ottenute sono  $\sqrt{N}$ -consistenti ed asintoticamente normali. Il modello stimato può essere utilizzato: per costruire simulazioni, per controllo, per ottenere previsioni ad un passo.

Osserviamo, infine, che i modelli soglia sono:

- sempre invertibili e quindi, se ben identificati e stimati, utilizzabili per costruire previsioni ottimali,
- riscrivibili come processi markoviani e quindi possono essere utilizzati i noti risultati statistico probabilistici disponibili per questi processi,

- sotto condizioni di regolarità blande, stazionari ed ergodici.

Ricordiamo che questi modelli sono in grado di catturare:

- cicli limiti
- asimmetrie nei cicli
- variazioni asimmetriche nei livelli
- variazioni nel drift.

### 3.4. I modelli bilineari

Sono la più semplice generalizzazione dei modelli lineari a quelli non lineari e storicamente sono ottenuti come una particolare generalizzazione degli sviluppi di Volterra (Granger e Andersen, 1978). La classe dei modelli bilineari più utilizzata è quella detta *sotto-diagonale* data da

$$Y_t = \mathbf{f}_o + \sum_{j=1}^p \mathbf{f}_j Y_{t-j} + \sum_{j=1}^q \mathbf{q}_j \mathbf{e}_{t-j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^h b_{ij} Y_{t-i-j} \mathbf{e}_{t-j},$$

in sigla BL(p,q,k,h), che è sempre rappresentabile come un markoviano.

Questo modello può essere ulteriormente generalizzato al caso multivariato o, più semplicemente, al caso in cui sono presenti variabili esogene. L'importanza pratica di questa classe di modelli è che possono descrivere fenomeni che presentano forti ed improvvise esplosioni seguite da lunghi periodi di calma. Di esso sono note le condizioni di stazionarietà (Tong, 1990) traducibili in condizioni sui parametri mentre non si può dire la stessa cosa per quel che riguarda l'invertibilità: le condizioni di invertibilità sono quasi sempre non traducibili a condizioni esplicite sui parametri che coinvolgono il modello, a meno di casi molto particolari.

Inoltre, risulta difficile identificare la struttura bilineare dato che la autocovarianza è confondibile con quella degli ARMA. I test attualmente in uso permettono di identificare la presenza di non linearità e di quella bilineare in particolare, ma non la sua struttura. La stima dei parametri viene, di solito, ottenuta con il metodo dei minimi quadrati condizionati (COLS) che si dimostrano essere consistenti, ed in alcuni casi, asintoticamente normali (Graham, 1995), ma non è, in generale, possibile derivarne la relativa varianza. Un risultato in tal senso è stato raggiunto in Giordano e Vitale (2000), per un particolare modello bilineare.

Tali motivi hanno determinato uno scarso utilizzo di questa classe di modelli, in particolare per costruire previsioni.

#### Esempio 4

Consideriamo il caso di un BL(1,0;1,1)

$$Y_t = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 Y_{t-1} + b_{10} Y_{t-1} \mathbf{e}_{t-1} + b_{11} Y_{t-2} \mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{e}_t$$

se poniamo  $b_{10} Y_{t-1} = \mathbf{q}_{1t}$ ,  $b_{11} \mathbf{e}_{t-1} = \mathbf{f}_{2t}$  questo bilineare diviene un ARMA(2,1) con parametri stocastici.

#### Esempio 5

Consideriamo il modello bilineare

$$Y_t = \mathbf{e}_t + b Y_{t-2} \mathbf{e}_{t-1}$$

ove  $\mathbf{e}_t$  è white noise normale con varianza unitaria. La struttura di covarianza di questo particolare BL è indistinguibile da quello di white noise, mentre la sua distribuzione limite è asimmetrica e leptocurtica. Nella Figura 6 è riportata una traccia di tale processo per  $b=0.45$ .

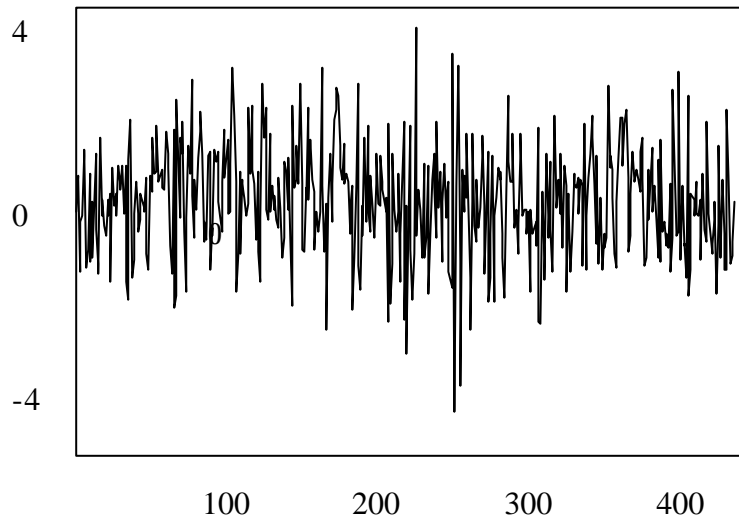


Figura 6. Una traccia del processo bilineare con  $b=0.45$

Nella tabella che segue (tabella 1), sono riportate le prime 20 autocorrelazioni, globali e parziali (AC e PAC), di questo processo bilineare che, come si può notare, sono compatibili con quelle ottenibili da un white noise.

*Tabella 1. Prime 20 autocorrelazioni del bilineare con  $b=0.45$ .*

AC	PAC	lag	AC	PAC	Q-Stat	Prob
.*	.*	1	0.067	0.067	2.1846	0.139
* .	* .	2	-0.096	-0.101	6.6180	0.037
. .	. .	3	0.046	0.061	7.6497	0.054
. .	. .	4	0.051	0.034	8.9090	0.063
. .	. .	5	-0.028	-0.024	9.2810	0.098
. .	. .	6	0.022	0.032	9.5109	0.147
.*	.*	7	0.085	0.072	13.016	0.072
. .	. .	8	-0.016	-0.023	13.142	0.107
. .	. .	9	0.032	0.051	13.644	0.136
. .	. .	10	0.035	0.015	14.256	0.162
.*	.*	11	0.098	0.101	19.003	0.061
. .	. .	12	0.014	0.006	19.105	0.086
. .	. .	13	-0.001	0.008	19.105	0.120
. .	. .	14	-0.007	-0.020	19.131	0.160
. .	. .	15	0.006	0.003	19.151	0.207
. .	. .	16	-0.031	-0.041	19.620	0.238
. .	. .	17	-0.009	-0.007	19.660	0.292
.*	. .	18	0.067	0.047	21.903	0.236
. .	. .	19	0.002	-0.006	21.905	0.289
. .	. .	20	-0.015	-0.009	22.023	0.339

In fine, nella figura 7 è riportata una stima non parametrica (metodo kernel) della densità limite (BL) del processo e quella della relativa normale (N) in cui risulta evidente l'asimmetria e, più marcatamente, la curtosi del bilineare.



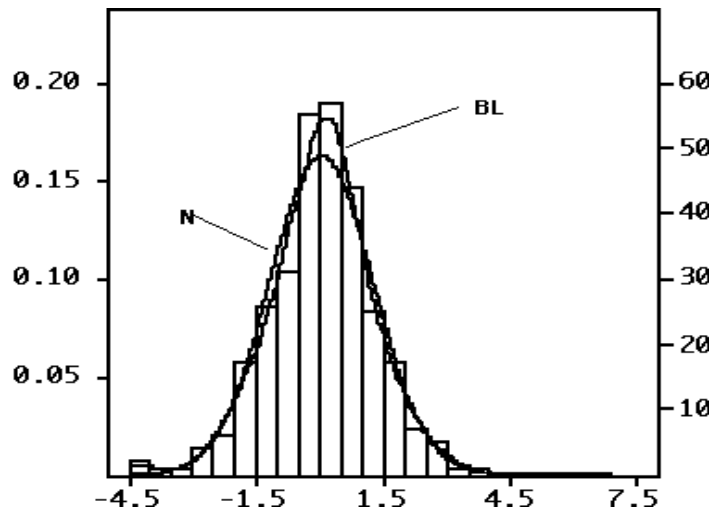


Figura 7. Istogramma del bilineare con  $b=0.45$ , distribuzione limite del bilineare(BL) e distribuzione della relativa normale (N).

#### 4. Una proposta ed alcune applicazioni empiriche

Nell'analisi di molti fenomeni reali è possibile riscontrare la presenza di diverse caratteristiche peculiari che spesso diventa difficile catturare e prevedere con uno specifico modello parametrico. A tal scopo può essere utile combinare più strutture parametriche.

I bilineari di basso ordine, di cui sono note sia le proprietà probabilistiche che quelle statistiche, possono essere utilizzati, in simultanea ad altri modelli non lineari, come quelli a soglia, per catturare asimmetrie nei livelli, cicli limitati e curtosi. In particolare, i modelli soglia con residui bilineari del tipo presentato nell'esempio 5, TAR-BL, possono essere un utile strumento sia investigativo che previsivo per molti fenomeni che presentano contemporaneamente asimmetrie nei livelli e improvvisi allontanamenti dal livello medio.

Queste caratteristiche sono, ad esempio, tipiche delle serie finanziarie ma anche di alcuni fenomeni idrologici come le portate dei fiumi. Per valutare la capacità previsiva della struttura proposta presentiamo due applicazioni di modelli soglia con residui bilineari, la prima su dati di natura idrologica e la seconda riguardante quotazioni finanziarie.

#### 4.1 Un Modello TAR-BL per la previsione del livello di portata

Il primo set di dati utilizzato per l'analisi empirica si riferisce alle portate medie giornaliere del fiume Sarno in Campania, misurate alla stazione di San Valentino Torio (SA). Le rilevazioni riguardano il periodo dal 1.1.1974 al 8.3.1978 per un totale di 1792 osservazioni. Di queste solo 1700 sono state utilizzate per identificare il modello, lasciando le rimanenti osservazioni per la valutazione delle previsioni.

Lo scopo è quello di costruire un modello nonlineare che consenta di effettuare previsioni in tempo reale sull'andamento del livello di portata. L'andamento delle portate è tipicamente non-lineare (Linsley, 1982), la possibilità di utilizzare per tale fenomeno modelli non-lineari a soglia fu proposta da Tong e Lim (1980). L'andamento delle portate è spesso caratterizzato da picchi improvvisi che è possibile catturare con una struttura bilineare, da qui la proposta di utilizzare un modello soglia con residui bilineari, TAR-BL, per prevedere il livello di portata.

Per individuare i diversi stati del sistema come variabile soglia consideriamo i valori ritardati della stessa variabile portate utilizzando un modello, SETAR-BL del tipo:

$$Y_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^k a_i^{(j)} Y_{t-i} + \varepsilon_t \quad r_{j-1} < Y_{t-d} \leq r_j$$

$$\varepsilon_t = u_t + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^h b_{ij} \varepsilon_{t-i} u_{t-j}$$

per  $j=1, \dots, l$ , e i valori soglia,  $(r_0, r_1, r_2, \dots, r_l)$ , tali che  $r_0 < r_1 < \dots < r_l$ ,  $r_0 =$

$= -\mathbb{1}_{e r_l} + \mathbb{1}$  con  $\hat{A}_j = (r_{j-p}, r_j]$ ,  $u_t$  normalmente distribuito con media zero e varianza  $\sigma^2$

Per garantire la stazionarietà della serie delle portate ne consideriamo la trasformazione in differenze logaritmiche (figura 8).

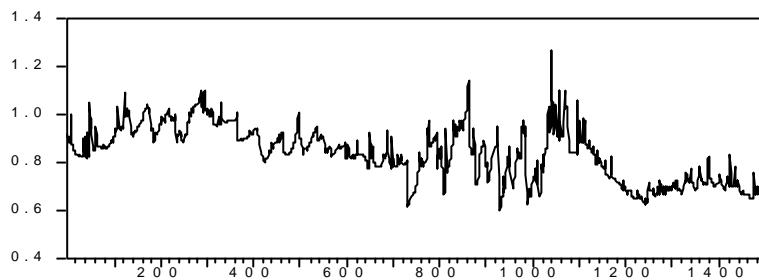


Figura 8. Rappresentazione grafica di  $\tilde{N} \text{Log}_{10}(\text{portate})$

Per indagare sulla presenza di non-linearità di tipo soglia utilizziamo il test di linearità di Tsay (1998) che ci porta a rifiutare l'ipotesi nulla di linearità per diversi valori del ritardo  $d$ , i migliori risultati (tab.2) si hanno per  $d=1$  e  $d=2$ , che possono essere considerati come possibili scelte del ritardo  $d$  della variabile soglia. Come numero di regimi  $s$ , in base a considerazioni teoriche, abbiamo considerato sia  $s=2$  che  $s=3$  con una chiara preferenza per tre regimi in termini di AIC (Akaike Information Criteria). Predeterminando, con i criteri classici di identificazione lineare basata sul livello dei legami di covarianza, un intervallo di riferimento per l'ordine autoregressivo  $p$ , per ogni combinazione di  $p$ ,  $d$  ed  $s$  abbiamo scelto i valori soglia che minimizzano l'AIC.

Tabella 2. Test di Tsay per la non-linearità

$d$	1	2	3	4	5
<b>Test</b>	41.81	33.95	19.63	28.69	26.21
<b>d.f.</b>	4	4	4	4	4

Dopo aver rifinito gli ordini e i valori delle soglie il modello stimato risulta essere un modello SETAR a 3 regimi con ordine

autoregressivo  $\{p_1=5, p_2=3, p_3=3\}$ . Le soglie stimate, con un ritardo  $d=1$ , risultano essere  $\hat{\tau}_1=0.75$  e  $\hat{\tau}_2=0.895$ .

Per inglobare nel modello gli improvvisi allontanamenti dal livello medio che caratterizzano l'andamento delle portate stimiamo sui residui del modello TAR una struttura bilineare. In particolare consideriamo un modello bilineare semplice con  $h=1$  e  $m=2$  del tipo:

$$\varepsilon_t = u_t + b\varepsilon_{t-2}u_{t-1}$$

Come procedura di stima utilizziamo la stima CLS (Conditional Least Squares) proposta da Grahn (1995) che consente di ottenere stime consistenti per il parametro  $b$  e la varianza del residuo,  $\sigma^2$ . La varianza dello stimatore di  $b$  è stata calcolata utilizzando la forma analitica proposta da Giordano e Vitale (2000). Le stime dei coefficienti, e le relative deviazioni standard, sono riportate in tab. 3

Tabella 3. Stime dei LS e CLS

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$b$	$\sigma^2$
<i>I</i>	0.0694 (0.023)	1.0971 (0.052)	-0.1267 (0.063)	-0.1162 (0.054)	0.1210 (0.050)	-0.0702 (0.034)		
<i>II</i>		1.0256 (0.059)	-0.1934 (0.058)	0.1548 (0.042)			0.020 (0.087)	0.076 (8.334)
<i>III</i>	0.0885 (0.024)	0.7933 (0.037)	-0.1111 (0.050)	0.2218 (0.040)				

Il modello stimato è stato utilizzato per ottenere previsioni un passo avanti dalla 1701-esima osservazione fino alla 1792-esima. Dal confronto grafico fra serie empirica e serie prevista con il SETAR-BL, mostrato in figura 9, l'abilità predittiva del modello sembra poter essere considerata soddisfacente. Per la valutazione numerica delle previsioni sono stati utilizzati alcuni fra i classici indici: *mean error* (ME), *mean square error* (MSE); *root mean square error* (RMSE), *mean absolute error* (MAE). I risultati sono riportati in tabella 4.

Tabella 4 Indici di valutazione delle previsioni

ME	MSE	RMSE	MAE
-0.05470	0.01491	0.12213	0.09548

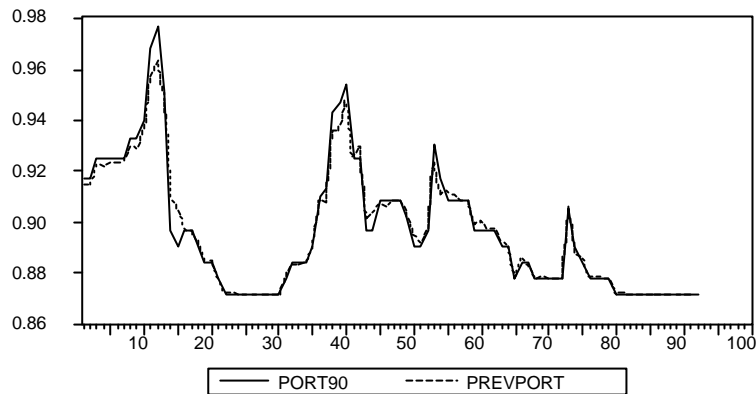


Figura 9. Previsioni 1-passo avanti (---) e serie empirica (—)

#### 4.2 Il modello TAR-BL per dati finanziari

La presenza di strutture asimmetriche nei livelli e il verificarsi di improvvisi allontanamenti dal livello medio, sono caratteristiche tipiche dell'andamento dei prezzi azionari. Il modello TAR-BL è stato utilizzato per catturare il comportamento di quotazioni giornaliere di azioni ordinarie di alcune società quotate sul Mercato Azionario della Borsa di Milano. I dati si riferiscono alle quotazioni relative al periodo dal gennaio 1997 al dicembre 1998, di Fiat e Generali, per un totale di 500 osservazioni per ciascuna serie. I rendimenti, calcolati come differenze prime logaritmiche,  $R_t = \nabla(\log X_t)$ , usati nell'analisi sono rappresentati in figura 10. L'analisi è basata sulle prime 480 osservazioni lasciando le ultime per la valutazione delle previsioni.

I valori di tabella 5 evidenziano la presenza di non-linearità sia per la serie Fiat che per la serie Generali. Tale ipotesi è confermata dai risultati del test di linearità di Tsay che rifiuta l'ipotesi nulla di linearità e suggerisce di scegliere come ritardo per la variabile soglia rispettivamente  $d=2$  e  $d=1$  (tabella 6).

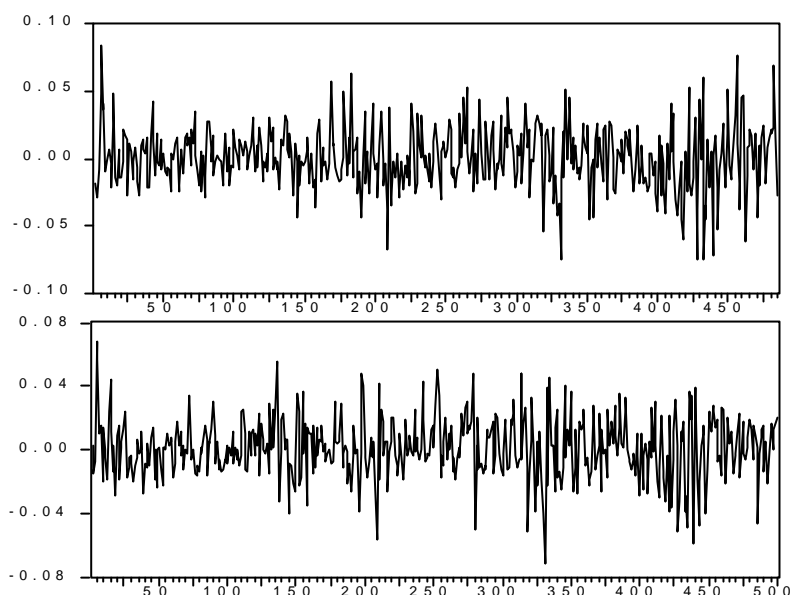


Figura 10. Rappresentazione grafica dei rendimenti di Fiat (alto) e Generali(basso)

Tabella 5. Statistiche Descrittive e Tests di normalità

	<b>FIAT</b>	<b>GENERALI</b>
<b>Mean</b>	0.000524	0.001867
<b>St.Dev</b>	0.023119	0.019070
<b>Skewness</b>	-0.072798	-0.069356
<b>Kurtosis</b>	4.047934	4.002357
<b>Jarque-Bera</b>	23.27345	21.28986
<b>Liung-Box 20</b>	37.627	24.6587

L'andamento del mercato azionario è tipicamente influenzato da ciò che accade nei giorni precedenti, questo ci porta a considerare come variabile soglia i valori ritardati della stessa variabile in analisi. Per catturare, non solo l'asimmetria nei livelli, ma gli improvvisi allontanamenti dal livello medio introduciamo una componente BL nell'errore ottenendo la stima di un modello soglia Self-Exiting con residui bilineri, SETAR-BL.

Tabella.6. Test di Tsay per non-linearità di tipo soglia

<i>D</i>		1	2	3	4	5
<i>Fiat</i>	<i>Test</i>	12.76	13.13	13.07	11.89	2.99
	<i>d.f.</i>	6	6	6	6	6
<i>Generali</i>	<i>Test</i>	24.25	3.09	14.23	11.53	3.41
	<i>Df</i>	5	5	5	5	5

Seguendo la procedura di identificazione e stima proposta da Tsay, identifichiamo un SETAR(2;4,1) per la serie Fiat con ritardo  $d=2$  e valore soglia  $\hat{\tau}=0.0093$ ; un SETAR(2;4,2) per la serie Generali con  $d=1$  e  $\hat{\tau}=0.0026$ . Per il residuo bilineare si considera la struttura semplice con  $h=1$  e  $m=2$ . I risultati delle stime dei coefficienti per le due serie considerate sono riportati in tabella 7. I risultati degli indici per la valutazione delle previsioni sono mostrati in tabella 8.

Tabella 7. Stime LS e CLS

		$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$b$	$S^2$
<i>Fiat</i>	<i>I</i>	0.1498 (0.081)				0.1925 (0.074)	0.0045 (0.002)	0.8840 (0.092)
	<i>II</i>	0.1838 (0.082)						
<i>Gene</i>	<i>I</i>				-0.2548 (0.061)	0.1432 (0.062)	0.0285 (0.013)	0.7912 (0.090)
	<i>II</i>	0.1899 (0.106)	-0.0997 (0.046)					

Tabella 8. Indici di valutazione delle previsioni

	MEx100	MSEx100	RMSE	MAE
<i>Fiat</i>	0.0840	0.0590	0.0249	0.0185
<i>Generali</i>	0.0982	0.0384	0.0196	0.0148

L'ipotesi di partenza di un buon accostamento delle previsioni ottenute con il modello SETAR-BL per i rendimenti giornalieri di Fiat e Generali sembra confermata dai risultati numerici, in particolare il grafico di figura 11 evidenzia la capacità del modello nel catturare i punti di svolta della serie, quindi nell'indicare variazioni in aumento o in diminuzione nell'andamento del mercato azionario.

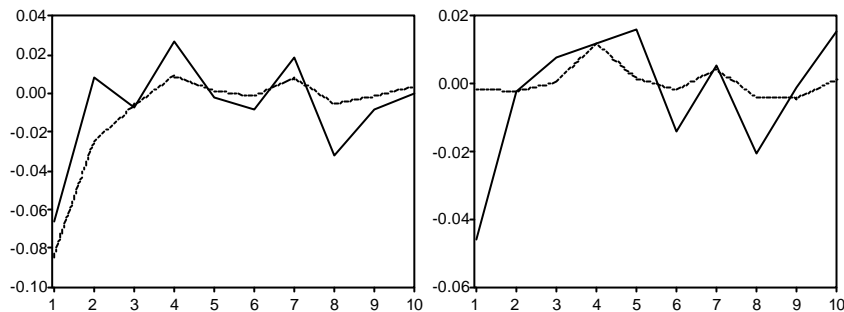


Figura 11. Previsioni 1-passo avanti (---) e serie empirica ( $\frac{3}{4}$ ) per Fiat (sin.) e Genenali (dx.)

Ringraziamenti: Il lavoro è stato parzialmente finanziato dal progetto Murst98 "Modelli statistici per l'analisi delle serie temporali"

### Riferimenti bibliografici

Amendola A., Andreano M.S., Vitale C., (1996) Modelli non-lineari nelle serie finanziarie: esigenze teoriche ed evidenze empiriche, XXXVIII Riunione Scientifica della SIS, 1, 547-558

Amendola A., Storti G. (1999) A threshold model for the rainfall-flow non-linearity, *Book of Short Paper, SCO99*, 179-84.

Bera A. K., Higgings M.L. (1997) Arch and bilinearity as competing model for nonlinear dependence, *Journal of Business & Economic Statistics*, 15, 43-50

Brooks C., (1997) Linear and Non-linear (Non-)Forecastability of High-frequency Exchange Rates *Journal of Forecasting*, 16, 125-145

Chen, C.W. (1997) Detection of additive outliers in bilinear time series, *Computational Statistics & Data Analysis*, 24, 283-294

Chen, C.W. (1998) A Bayesian analysis of generalized threshold autoregressive models, *Statistics & Probability Letters*, 40, 15-22

Davis R.A., Resnick S.I., (1996) Prediction of Stationary max-



stable processes, *Annals of Applied Probability*, 6, 1191-1210

Diebolt J., Wandji J.N., (1997) A Non-parametric test for Generalized First-order Autoregressive Models, *Scandinavian Journal of Statistics*, 24, 241-259

Enders W, Granger C.W.J., (1998), Unit-Root Test and asymmetric Adjustment with an example using the term Structure of Interest Rates, *Journal of Business & Economic Statistics*, 16, 304-311

Grahn T., (1995) A conditional least square approach to bilinear time series estimation, *Journal of Time Series Analysis*, 16, 509-529

Granger C.W.J., Anderson A.P., (1978), *An Introduction to Bilinear Time Series Models*, Vandenhoeck & Ruprecht, Gottingen.

Giordano F., Vitale C., (2000), Intervalli di confidenza asintotici per modelli bilineari in serie storiche, *XL Riunione Scientifica della SIS*, 623-626.

Krager H., Kugler P., (1993), Nonlinearities in foreign exchange markets: a different perspective, *Journal of International Money and Finance*, 12.

La Rocca M., Vitale C., (1999): Subseries Length in MBB Procedure for  $\alpha$ -mixing processes, *Book of Short Paper, Cladag99*, 93-96.

Lewis P.A., Ray B.K., (1997), Modelling Long-Range Dependence, Nonlinearity and Periodic Phenomena, *Journal of the American Statistical Association*, 92, 881-893

Li W.K., Lam K. (1995): Modelling Asymmetry in stock returns by a threshold autoregressive conditional heteroscedastic model, *The Statistician*, 44, 333-41.

Linsley R.K., Kohler M.A., Paulhus J.L. (1982) *Hydrology for Engineers*, McGraw-Hill, New York.

Martins C.M., (1997), A note on the Autocorrelations related to the Bilinear model with non-independent shocks, *Statistics & Probability Letters*, 36, 245-250.

McCulloch R.E., Tsay R.S., (1994) Bayesian analysis of autoregressive time series via the Gibbs sampler, *Journal of Time Series Analysis*, 15, 235-250

Montgomery A.L., Zarnowitz V., Tsay R., Tiao G.C., (1998), Forecasting the U.S. Unemployment Rate, *Journal of the American Statistical Association*, 93, 478-493.

- Tjøstheim D. (1994), Non-linear time series: a selected review, *Scandinavian Journal of Statistics*, 21, 97-130
- Tong H. (1983) *Lecture Notes in statistics: Threshold models in nonlinear time series analysis*, Springer-Verlag.
- Tong H., (1990): *Non-Linear Time Series: A Dynamical System Approach*, Oxford Publications, Oxford University Press.
- Tong H., Lim K. (1980) Threshold Autoregression, Limit Cycles and Cyclical Data, *Journal of Royal Statistical Society*, 42, 245-292.
- Tong H., Lim K. (1980): Threshold Autoregression, Limit Cycles and Cyclical Data, *Journal of Royal Statistical Society*, 42, 245-292.
- Tsay R. (1998), Testing and Modelling Multivariate threshold Models, *Journal of the American Statistical Association*, 93, 1188-1202.
- Tsay R.S., (1989), Testing and modelling threshold autoregressive processes, *Journal of the American Statistical Association*, 84, 405.
- Turkman K.F., Turkman M.A., (1997) Extremes of bilinear time series models, *Journal of Time Series Analysis*, 18, 305-319
- Yuqing Dai, Billard L., (1998), A State-Space Bilinear Model and its Identification, *Journal of Time Series Analysis*, 19, 675-697