

I minimi quadrati a due stadi per la stima di serie spazio-temporali con effetto simultaneo

Alessia Naccarato

*ISTAT – Servizio Progettazione e Supporto Metodologico
nei Processi di Produzione Statistica
E-mail: naccarat@istat.it*

Summary: In a general formulation of a spatio-temporal models we believe that simultaneous spatial effects cannot be disregarded. If simultaneous spatio-temporal effects are present in the data generating process, LS estimates become inconsistent. To estimate this effects, recent literature propose the use of maximum likelihood estimates, while in our opinion two-stage least square seems to be more appropriate and computationally easier to handle.

In this paper we estimate a model in which the specification of space-time simultaneous effects take into account intensity and direction of relations among variables in different sites not depending on distance. An empirical application to monthly data on the index of industrial turnover in Lombardy is presented.

Keywords: Space-Time Models, Vector-autoregressive Models, Two-Stage Least Square, Maximum Likelihood Estimates.

1. Introduzione

Allo scopo di interpretare e prevedere un fenomeno nella sua dinamica sia spaziale che temporale consideriamo in questo lavoro più successioni di osservazioni temporali concomitanti. Quando le serie in esame rappresentano le osservazioni rilevate in S siti, si possono considerare le interrelazioni esistenti tra di essi allo scopo di ottenere una migliore descrizione del sistema.

I modelli che studiano l'insieme delle relazioni che intercorrono tra tutti i siti di un sistema spaziale, usualmente si basano su scelte fatte a priori dal ricercatore le quali possono essere di natura più svariata. Generalmente si ipotizza che le influenze tra siti diversi siano funzione della distanza tra i siti stessi (Elhorst, 2001), ipotesi questa che, fra l'altro, da luogo ad una simmetria degli effetti che non sempre si riscontra nella realtà.

Partendo dalla constatazione che esistono fenomeni per i quali è possibile ipotizzare l'esistenza di un sistema di relazioni spaziali in funzione di fattori – in parte o del tutto – indipendenti dalla distanza, in questo lavoro proponiamo un modello nel quale le relazioni intercorrenti tra i siti del sistema non siano funzione della distanza tra gli stessi.

E' d'altronde implicito che, se la distanza tra le localizzazioni spaziali ha un effetto sulla diffusione del fenomeno, tale effetto viene colto comunque dal modello anche senza introdurre esplicitamente in esso una qualsiasi funzione della distanza.

Nel modello proposto si tiene conto dell'intensità e della direzione dell'effetto che il fenomeno registrato nelle localizzazioni di un intero sistema spaziale produce su un singolo sito, focalizzando in particolare l'attenzione sull'effetto simultaneo che le altre localizzazioni del sistema hanno su di esso.

La componente puramente spaziale del fenomeno, ovvero l'effetto delle interrelazioni fra le diverse localizzazioni al tempo corrente è una delle componenti più importanti del modello che non può essere in alcun caso tralasciata.

La sua esplicita considerazione pone però problemi di stima legati alla correlazione tra la componente endogena contemporanea e la componente accidentale: in questa situazione le stime dei Minimi Quadrati Ordinari dei parametri incogniti del modello risultano non consistenti. Per risolvere questo problema, a differenza di quanto indicato nella letteratura corrente, si propone qui l'uso dei Minimi Quadrati a Due Stadi che forniscono stime consistenti dei parametri incogniti del modello.

Il lavoro presentato è suddiviso in tre parti: nei paragrafi 2, 3 e 4 si descrive il modello e le sue specificazioni, nei paragrafi 5 e 6 si affronta

il problema della stima di un modello con effetto simultaneo e si descrive l'utilizzo dei Minimi Quadrati a Due Stadi nello specifico contesto. Nel paragrafo 7 infine, si propone un'applicazione a dati economici.

2. La formalizzazione del modello

Supponiamo che siano disponibili per ciascuna delle S localizzazioni $i = 1, 2, \dots, S$ e T istanti successivi $t = 1, 2, \dots, T$ le osservazioni relative alla variabile aleatoria Y e consideriamo un modello nel quale la dipendenza lineare di natura dinamica è sia spaziale che temporale (Naccarato, 1999). E' ovviamente possibile considerare una generalizzazione del modello includendo la presenza di una o più variabili esogene rilevate negli stessi tempi e negli stessi siti, ma di questo caso non ci occuperemo in questa sede.

I modelli dinamici sono caratterizzati dalla presenza di variabili endogene *ritardate*, cioè riferite a diversi istanti temporali $t - 1, t - 2, \dots$ che rappresentano quindi variabili predeterminate, oltre a quelle riferite all'istante temporale t che definiremo *correnti*.

Nel modello considerato, introdurremo dunque le seguenti componenti:

- la *componente spaziale* o *simultanea* il cui scopo è quello di rappresentare l'effetto puramente spaziale del fenomeno, ovvero l'effetto che il fenomeno rilevato al tempo t nella j -esima localizzazione produce nello stesso istante di tempo sul fenomeno rilevato nel sito i ;
- la *componente temporale autoregressiva* che approssima, a meno di errori indipendenti, le osservazioni ai vari tempi t nel sito i mediante una combinazione lineare delle passate osservazioni nello stesso sito;
- la *componente spatio-temporale* il cui scopo è quello di rappresentare l'effetto congiunto nello spazio e nel tempo del fenomeno, ovvero l'influenza che il fenomeno che si è manifestato nei siti del sistema, in tempi precedenti, può avere

sull'osservazione relativa all'*i-esimo* sito considerato al tempo corrente.

Adottando la convenzione di indicare con l'indice in basso la componente temporale e con quello in alto la localizzazione spaziale, le grandezze presenti nel modello possono essere indicate nel seguente modo.

- α^i la costante del modello relativo alla *i-esima* localizzazione;
- y_t^i il fenomeno rilevato al tempo t nella localizzazione i ;
- y_{t-p}^i lo stesso fenomeno rilevato nella stessa localizzazione, ma p istanti precedenti a t ;
- β_p^i l'effetto che il fenomeno rilevato nella *i-esima* localizzazione p istanti precedenti a t , produce sul fenomeno rilevato nella stessa localizzazione al tempo t ;
- w_0^{ji} l'effetto che il fenomeno rilevato nella *j-esima* localizzazione al tempo t produce sulla *i-esima* localizzazione nello stesso istante di tempo;
- w_p^{ji} l'effetto che il fenomeno rilevato nella *j-esima* localizzazione al tempo $t-p$ produce sulla *i-esima* localizzazione al tempo t ;
- u_t^i la componente accidentale del modello relativo alla *i-esima* localizzazione.

L'esplicitazione del modello per ogni singola localizzazione spaziale è pertanto:

I Minimi Quadrati a Due Stadi in serie spazio-temporali con effetto simultaneo

$$\begin{aligned}
y_t^i &= \alpha^i + w_0^{j_1 i} y_t^{j_1} + w_0^{j_2 i} y_t^{j_2} + \dots + w_0^{j_{S-1} i} y_t^{j_{S-1}} + \\
&+ \beta_1^i y_{t-1}^i + w_1^{j_1 i} y_{t-1}^{j_1} + w_1^{j_2 i} y_{t-1}^{j_2} + \dots + w_1^{j_{S-1} i} y_{t-1}^{j_{S-1}} + \\
&+ \beta_2^i y_{t-2}^i + w_2^{j_1 i} y_{t-2}^{j_1} + w_2^{j_2 i} y_{t-2}^{j_2} + \dots + w_2^{j_{S-1} i} y_{t-2}^{j_{S-1}} + \\
&+ \dots + \\
&+ \beta_p^i y_{t-p}^i + w_p^{j_1 i} y_{t-p}^{j_1} + w_p^{j_2 i} y_{t-p}^{j_2} + \dots + w_p^{j_{S-1} i} y_{t-p}^{j_{S-1}} + \\
&+ \dots + \\
&+ \beta_P^i y_{t-P}^i + w_P^{j_1 i} y_{t-P}^{j_1} + w_P^{j_2 i} y_{t-P}^{j_2} + \dots + w_P^{j_{S-1} i} y_{t-P}^{j_{S-1}} + \\
&+ u_t^i
\end{aligned} \tag{1}$$

$$i, j = 1, \dots, S; \quad j \neq i$$

$$p = 1, \dots, P$$

che in funzione delle diverse componenti considerate può anche essere scritta come segue:

$$\begin{aligned}
y_t^i &= \alpha^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^S w_o^{ji} y_t^j + \\
&+ \sum_{p=1}^P \beta_p^i y_{t-p}^i \\
&+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^S w_1^{ji} y_{t-1}^j + \dots + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^S w_p^{ji} y_{t-p}^j + \dots + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^S w_P^{ji} y_{t-P}^j + \\
&+ u_t^i
\end{aligned} \tag{1.a}$$

3. Le specificazioni del modello

La caratterizzazione del modello non è completa se non si esplicitano le assunzioni sulla componente accidentale e sulle caratteristiche del processo autoregressivo. Nei modelli spazio-temporali le assunzioni usuali sono le seguenti:

1. $E(u_t^i) = 0 \quad \forall t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, S;$
2. $E(u_{t_1}^i u_{t_2}^i) = \begin{cases} \sigma_i^2 & i = 1, \dots, S \quad \forall t_1 = t_2 \\ 0 & i = 1, \dots, S \quad \forall t_1 \neq t_2 \end{cases}$
3. $E(u_t^i u_t^j) = \sigma_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, S; \forall i \neq j; \forall t = 1, \dots, T$

Dove l'assunzione $E(u_t^i u_t^j) = \sigma_{ij}$ implica che le componenti accidentali siano spazialmente correlate, cioè che componenti accidentali riferite ad uno stesso tempo t , ma a siti diversi, non siano indipendenti tra loro.

Ciò comporta che – nella (1) – le $y_t^{j_1}, \dots, y_t^{j_{S-1}}$ risulteranno correlate con le u_t^i , ovvero le variabili spaziali contemporanee saranno correlate con la componente accidentale;

4. $E(u_t^i u_{t-p}^j) = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, S; \forall i \neq j; \forall t = 1, \dots, T; \forall p = 1, \dots, P$ che implica che le componenti accidentali del modello non siano temporalmente correlate;

5. le variabili predeterminate non sono correlate con le componenti accidentali contemporanee u_t , così che sia

$$p \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{t-p}^i u_t^i \right) = 0 \quad \forall p = 1, \dots, P; \quad \forall i = 1, \dots, S;$$

6. i momenti del secondo ordine delle variabili predeterminate sono finiti;

7. la matrice delle variabili che figurano a secondo membro è di rango pieno. Quest'ultima è l'usuale ipotesi di assenza di collinearità fra le variabili esplicative necessaria per l'invertibilità della matrice dei regressori.

Per quanto riguarda le condizioni di stabilità del processo e quindi la sua stazionarietà, esse devono tener conto della presenza dell'effetto spaziale simultaneo. Pertanto alle condizioni usualmente imposte per i modelli spazio-temporali, ovvero che le P radici del polinomio $t^P - \beta_{p-1} t^{p-1} - \dots - \beta$ siano tutte in modulo minori di uno, si aggiunge la condizione di invertibilità della matrice dei coefficienti che colgono

gli effetti simultanei al tempo corrente, come si vedrà meglio nel paragrafo successivo.

4. Il modello in forma compatta

Per passare ad una formulazione più compatta del modello relativa alle S equazioni del sistema spaziale considerato, indichiamo con Y_0 la $T \times S$ matrice che riporta i valori contemporaneamente assunti dalla variabile dipendente Y negli S siti del sistema spaziale considerato:

$$Y_0 = \begin{bmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \cdots & y_1^S \\ y_2^1 & y_2^2 & \cdots & y_2^S \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_t^1 & y_t^2 & \cdots & y_t^S \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_T^1 & y_T^2 & \cdots & y_T^S \end{bmatrix}$$

In maniera analoga indichiamo con Y_1, Y_2, \dots, Y_P le matrici dei ritardi temporali della variabile Y osservati negli S siti, così che il generico elemento y_{t-p}^j , con $p = 1, \dots, P$, indichi il valore della variabile Y rilevato nel sito j al tempo $t - p$.

Indichiamo inoltre con U_0 la matrice delle componenti accidentali:

$$U_0 = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \cdots & u_1^S \\ u_2^1 & u_2^2 & \cdots & u_2^S \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_T^1 & u_T^2 & \cdots & u_T^S \end{bmatrix}$$

per le quali valgono le ipotesi indicate in precedenza.
Si noti che, indicando con

$$\dot{U}_0 = \text{vec} U_0$$

le condizioni sulla componente accidentale risultano essere

$$E(\dot{U}_0) = 0; \quad E(\dot{U}_0 \dot{U}_0') = \Omega \otimes I$$

dove con Ω si è indicata la matrice di varianza e covarianza delle componenti accidentali relative a tutti i siti del sistema spaziale, che si suppone costante nel tempo.

La matrice dei coefficienti W_p con $p = 0, 1, \dots, P$ è definita come segue:

$$W_p = \begin{bmatrix} 0 & w_p^{12} & \dots & w_p^{1i} & \dots & w_p^{1S} \\ w_p^{21} & 0 & \dots & w_p^{2i} & \dots & w_p^{2S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_p^{i1} & w_p^{i2} & \dots & 0 & \dots & w_p^{iS} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_p^{S1} & w_p^{S2} & \dots & w_p^{Si} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

In essa figurano gli effetti spazio-temporali che – per un fissato ordine di ritardo temporale – ogni sito del sistema esercita su tutti gli altri. Il generico coefficiente w_p^{ij} indica quindi l'effetto che il fenomeno rilevato nel sito i al tempo $t - p$ esercita sul sito j al tempo t .

Analogamente il generico coefficiente w_0^{ij} indica l'effetto spaziale contemporaneo che il fenomeno rilevato nel sito i al tempo t esercita sul sito j nello stesso istante di tempo.

La matrice:

I Minimi Quadrati a Due Stadi in serie spazio-temporali con effetto simultaneo

$$\beta_p = \begin{bmatrix} \beta_p^1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_p^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_p^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \beta_p^S \end{bmatrix}$$

è la matrice dei coefficienti delle variabili autoregressive, nella quale il generico coefficiente β_p^i indica l'effetto che il fenomeno registrato nel sito i al tempo $t - p$ esercita sullo stesso sito al tempo corrente.

Indicando con

$$A_0 = \begin{pmatrix} I_S - W_0 \\ S \times S \quad S \times S \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} W_1 + \beta_1 \\ S \times S \quad S \times S \end{pmatrix}, \dots, A_p = \begin{pmatrix} W_p + \beta_p \\ S \times S \quad S \times S \end{pmatrix}$$

il modello per l'intero sistema spaziale può scriversi in forma più sintetica come segue:

$$Y_0 A_0 = Y_1 A_1 + \dots + Y_p A_p + \dots + Y_p A_p + U_0 \quad (2)$$

$T \times S \quad S \times S \quad T \times S \quad S \times S \quad T \times S \quad S \times S \quad T \times S \quad S \times S \quad T \times S$

che esplicitando le variabili endogene a secondo membro, può essere scritto anche nella seguente forma

$$Y_0 = Y_0 W_0 + Y_1 A_1 + \dots + Y_p A_p + \dots + Y_p A_p + U_0 \quad (2.a)$$

$T \times S \quad T \times S \quad S \times S \quad T \times S \quad S \times S \quad T \times S \quad S \times S \quad T \times S \quad S \times S \quad T \times S$

Si noti che per costruzione, gli elementi diagonali del prodotto $Y_0 W_0$ sono nulli e pertanto nell'equazione relativa a ciascun sito, a secondo membro risulta esclusa la variabile endogena contemporanea ad esso relativa.

Si noti inoltre che gli elementi delle matrici dei coefficienti A_p non devono necessariamente essere tutti diversi da zero. Può infatti accadere, che il fenomeno rilevato in un determinato sito j al tempo

$t-p$ non produca alcun effetto sul fenomeno rilevato nella localizzazione i al tempo t ; in tal caso il corrispondente coefficiente w_p^{ji} sarà nullo. Allo stesso modo se il fenomeno rilevato nell' i -esimo sito al tempo $t-p$ non produce nessun effetto sul fenomeno rilevato nella stessa localizzazione al tempo t , il coefficiente autoregressivo β_p^i sarà nullo.

Infine in base alla (2), la condizione di stabilità del modello (Lutkephol, 1991) assume la forma

$$\det(I_S - A_1 A_0^{-1} z - A_2 A_0^{-1} z^2 - \dots - A_p A_0^{-1} z^p) \neq 0 \quad \forall |z| \leq 1,$$

per la quale, come già si è notato, è necessaria la condizione aggiuntiva relativa all'esistenza dell'inversa della matrice A_0 .

5. Problemi di stima dei parametri del modello

Le difficoltà di stima dei parametri di un modello così costruito sono legate principalmente a due diversi ordini di problemi. Il primo è relativo alla presenza della componente spaziale contemporanea, il secondo è legato alla eccessiva numerosità dei parametri da stimare.

Per quel che riguarda il primo ordine di problemi si deve notare che, poiché le componenti accidentali nei diversi siti del sistema nello stesso istante di tempo risultano fra loro correlate, i Minimi Quadrati Ordinari non producono stime consistenti dei parametri del modello.

In letteratura viene generalmente proposto (Deutsch, Pfeifer, 1980; Deutsch, Pfeifer, 1981; Terzi 1995) – sotto l'ipotesi di normalità della componente accidentale – l'uso del metodo della Massima Verosimiglianza per l'applicazione del quale è però necessario ricorrere a metodi iterativi per la massimizzazione della funzione di verosimiglianza. Utilizzando procedimenti di calcolo numerico si potrebbero però verificare problemi di convergenza, nel senso che le soluzioni potrebbero convergere a massimi locali e non al massimo

assoluto. Inoltre la condizione sulla normalità della componente accidentale, solo raramente si verifica nelle indagini econometriche.

Per ovviare a problemi di questa natura si propone qui l'uso del Metodo dei Minimi Quadrati a Due Stadi che oltre a non presentare problemi di convergenza ed a non imporre alcuna ipotesi distributiva sulla componente accidentale, fornisce stime consistenti (Hamilton, 1994) dei parametri strutturali del modello (2.a).

Il secondo ordine di problemi che si presenta nella stima di un modello spazio-temporale del tipo di quello proposto nel presente lavoro, è legato all'eccessiva numerosità dei parametri che potrebbe rendere il modello di difficile stima: il numero dei parametri incogniti è infatti funzione del massimo ordine di ritardo temporale considerato oltre che del numero delle localizzazioni spaziali. Per ovviare a questo problema si potrebbero imporre vincoli sui coefficienti del modello, a partire da ipotesi diverse quali ad esempio l'esistenza di strutture di similarità nel tempo degli effetti spaziali (Naccarato, 2001b).

Nella nostra esperienza però la presenza dell'effetto di tutti i siti in tutti i tempi non si verifica praticamente mai, così che il numero dei parametri da stimare sarà in generale molto più piccolo del numero massimo che si avrebbe se tutti i coefficienti risultassero diversi da zero. Questo fatto ha come conseguenza diretta che la condizione d'ordine per l'identificabilità dei parametri strutturali dei modelli ad equazioni simultanee risulterà generalmente rispettata.

6. L'uso dei minimi quadrati a due stadi per la stima dei parametri del modello

A partire dalla (2), che rappresenta la *forma strutturale* del modello spazio-temporale possiamo ricavarne la *forma ridotta* risolvendo rispetto a ciascuna variabile endogena al tempo corrente:

$$Y_0 = Y_1 \begin{pmatrix} A_1 & A_0^{-1} \\ S \times S & S \times S \end{pmatrix} + \dots + Y_P \begin{pmatrix} A_P & A_0^{-1} \\ S \times S & S \times S \end{pmatrix} + U_0 \begin{pmatrix} A_0^{-1} \\ S \times S & S \times S \end{pmatrix} \quad (3)$$

Il metodo dei minimi Quadrati a Due Stadi, del quale si propone qui un'applicazione, si fonda su due stadi di stima: il primo relativo alle stime dei parametri della *forma ridotta*, il secondo a quelle dei parametri della *forma strutturale*.

I parametri della *forma ridotta* (3) possono essere indicati nel seguente modo:

$$Q_1 = A_0^{-1} A_1, \dots, Q_P = A_0^{-1} A_P$$

$S \times S$ $S \times S$ $S \times S$ $S \times S$ $S \times S$ $S \times S$ $S \times S$

e ponendo

$$Z = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_P \\ T \times S & T \times S & & T \times S \end{bmatrix}, \quad Q^T = \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_2^T & \dots & Q_P^T \\ S \times SP & S \times SP & & S \times SP \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U_0 A_0^{-1} = V_0$$

$T \times SP$ $T \times S$ $T \times S$ $T \times S$ $S \times SP$ $S \times SP$ $S \times SP$ $S \times SP$ $T \times S$ $S \times S$ $T \times S$

la *forma ridotta* del modello può essere scritta come:

$$Y_0 = Z Q + V_0 \tag{3.a}$$

$T \times S$ $T \times SP$ $SP \times S$ $T \times S$

Nel primo stadio di stima, le stime dei parametri della forma ridotta si ottengono con i Minimi Quadrati Ordinari e risultano pertanto dall'espressione:

$$\hat{Q} = \left(Z^T Z \right)^{-1} Z^T Y_0 \tag{4}$$

$SP \times S$ $SP \times T$ $T \times SP$ $SP \times T$ $T \times S$

Sostituendo nella (4) ad Y_0 la sua espressione data dalla (3.a) si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \left(Z^T Z \right)^{-1} Z^T \left(Z Q + V_0 \right) = \\ &= Q + \left(Z^T Z \right)^{-1} Z^T V_0 \end{aligned} \tag{4.a}$$

$SP \times S$ $SP \times T$ $T \times SP$ $SP \times T$ $T \times S$ $T \times SP$ $SP \times S$ $T \times S$

I Minimi Quadrati a Due Stadi in serie spazio-temporali con effetto simultaneo

I valori \hat{Y}_0 interpolati a partire dalla *forma ridotta*, nel primo stadio di stima:

$$\hat{Y}_0 = Z \hat{Q} = Z Q + Z (Z^T Z)^{-1} Z^T V_0 \quad (5)$$

$\begin{matrix} T \times S & T \times SP & SP \times S & T \times SP & SP \times S & T \times SP & SP \times SP & SP \times T & T \times S \end{matrix}$

vengono sostituiti a secondo membro nella forma strutturale (2.a).

Si tratterà quindi nel secondo stadio di stima di utilizzare i Minimi Quadrati Ordinari per stimare la forma

$$Y_0 = \hat{Y}_0 W_0 + Y_1 A_1 + \dots + Y_K A_K + E_0 \quad (6)$$

$\begin{matrix} T \times S & T \times S & S \times S & T \times S & S \times S & T \times S & S \times S & T \times S \end{matrix}$

nella quale si è posto

$$E_0 = U_0 + Z (Z^T Z)^{-1} Z^T V_0 \quad (6.a)$$

La consistenza delle stime dei Minimi Quadrati a Due Stadi è assicurata dal fatto che la nuova componente accidentale E_0 è asintoticamente non correlata con le variabili endogene contemporanee \hat{Y}_0 stimate nel primo stadio.

Sarà infatti

$$\begin{aligned} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \hat{Y}_0^T E_0 &= \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \hat{Y}_0^T \left(U_0 + Z (Z^T Z)^{-1} Z^T V_0 \right) = \\ &= \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \hat{Q}^T Z^T U_0 + \\ &+ \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \hat{Q}^T Z^T Z (Z Z^T)^{-1} Z^T V_0 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

poiché è

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \hat{Q}^T = Q \quad \text{e} \quad \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} Z^T U_0 = 0$$

ed ancora

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \hat{Q}^T Z^T Z (ZZ^T)^{-1} Z^T V_0 = \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \hat{Q}^T \left[\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} Z^T U_0 \right] A_0^{-1} = 0$$

La (7) garantisce pertanto la consistenza delle stime di secondo stadio ottenute con i Minimi Quadrati.

L'espressione esplicita delle stime di secondo stadio si ottiene ponendo

$$A_{S \times (S+SP)}^T = \begin{bmatrix} W_0^T & A_1^T & \dots & A_P^T \\ S \times S & S \times S & & S \times S \end{bmatrix} \text{ e } X_{T \times S} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_0 & Y_1 & \dots & Y_P \\ T \times S & T \times S & & T \times S \end{bmatrix}$$

così da poter scrivere la *forma strutturale* (6) del sistema come segue:

$$Y_0_{T \times S} = X_{T \times (S+SP)} A_{(S+SP) \times S} + E_{T \times S}$$

Le stime consistenti dei parametri della *forma strutturale* ottenute nel secondo stadio saranno allora:

$$\hat{A}_{(S+SP) \times S} = \left(\begin{matrix} X^T \\ (S+SP) \times T \times (S+SP) \end{matrix} \right)^{-1} \begin{matrix} X^T \\ (S+SP) \times T \end{matrix} Y_0_{T \times S}$$

ed i valori interpolati per le variabili endogene, secondo la *forma strutturale*, risulteranno

$$\hat{Y}_0_{T \times S} = X_{T \times (S+SP)} \hat{A}_{(S+SP) \times S} = \hat{W}_0_{S \times S} \hat{Y}_0_{T \times S} + \hat{A}_1_{S \times S} Y_1_{T \times S} + \dots + \hat{A}_P_{S \times S} Y_P_{T \times S} .$$

Nel paragrafo che segue si presentano le stime ottenute con la (8) nel caso di un fenomeno economico, il fatturato, la cui variabilità spazio-

temporale può aiutare ad individuare alcune caratteristiche del territorio considerato.

7. Un'applicazione

Per mostrare il diverso comportamento del Metodo dei Minimi Quadrati a Due Stadi e della Massima Verosimiglianza, si presentano i risultati ottenuti con essi in uno specifico caso di studio relativo al fatturato mensile delle imprese localizzate nella regione Lombardia.

A tal fine si sono considerate le serie del fatturato¹ medio mensile delle industrie estrattive e manifatturiere² nelle 11 province lombarde, nel periodo da gennaio 2000 a gennaio 2004, per le imprese con più di 20 addetti (Fonte ISTAT). In questo contesto è possibile supporre che la diffusione spaziale del fenomeno, o per meglio dire l'influenza che il fatturato rilevato in una delle province ha su quello rilevato nelle altre province della stessa regione sia legata a fattori di natura economica e di industrializzazione dell'area considerata, piuttosto che alla distanza tra le province.

Si è stimato un modello spazio-temporale con un ritardo massimo pari a due e molti coefficienti sono risultati non significativamente diversi da zero.

Le stime dei Minimi Quadrati a Due Stadi dei coefficienti spazio-temporali presenti nelle matrici A_0 , A_1 e A_2 del modello (6) sono riportati rispettivamente nelle Tabelle 1a, 1b e 1c nelle quali, in ogni riga sono riportate le stime degli effetti che ogni provincia esercita su tutte le altre, mentre in colonna sono riportate le influenze che ogni provincia "subisce" da tutte le altre.

¹ Si è considerato il solo fatturato nazionale delle imprese.

² I settori interessati sono: industrie tessili e dell'abbigliamento, industrie conciarie, fabbricazione dei prodotti in cuoio, pelle e similari, industrie del legno e dei prodotti in legno, fabbricazione della pasta-carta, della carta e dei prodotti in carta, fabbricazione di fibre sintetiche e artificiali, produzione di metallo e fabbricazione dei prodotti in metallo, fabbricazione di macchine ed apparecchi meccanici, fabbricazione di macchine elettriche, fabbricazione di mezzi da trasporto, fabbricazione di mobili. Non si considerano quindi i settori relativi a combustibili nucleari, energia elettrica, gas e acqua, costruzioni.

L'adattamento del modello ai dati osservati è buono e i parametri stimati indicano alcune influenze spazio-temporali molto evidenti.

Per l'interpretazione dei risultati del modello, nelle tabelle che riportano le stime dei parametri, le province sono state ordinate secondo tre cerchi concentrici aventi come centro la provincia di Milano, in modo che su ognuno dei cerchi si trovino province approssimativamente equidistanti da Milano. Tale ordinamento è stato predisposto nell'ipotesi che la provincia di Milano potesse configurarsi come polo maggiormente "attrattivo" per l'attività di tutte le altre province.

Per quanto riguarda gli effetti spaziali simultanei (Tab. 1a) si osserva che l'interazione tra le diverse province non sembra essere particolarmente legata alla distanza tra le stesse, né si individuano una o più province che svolgono un ruolo particolare nell'insieme delle relazioni che intercorrono tra tutte le province. Una eccezione è rappresentata dalla provincia di Bergamo che esercita la sua influenza su quasi tutte le province, ma subisce l'effetto del fatturato rilevato nelle sole province di Cremona e Brescia.

Tabella 1a. – Le stime dei coefficienti spaziali simultanei ottenute con i Minimi Quadrati a Due Stadi

A0	Milano	Lodi	Como	Pavia	Lecco	Bergamo	Varese	Cremona	Brescia	Sondrio	Mantova
Milano	1	0,103									
Lodi	1,551	1			0,141				-0,437		
Como			1	1,091	0,887		0,375				
Pavia	-0,638		0,812	1	-0,467			-0,503	-0,469	0,540	-1,371
Lecco		0,594	0,223	-0,203	1		0,359			-0,271	
Bergamo	-1,024	0,519	0,117			1	0,308	0,853	1,239		2,178
Varese							1	0,564	0,252		
Cremona		0,254		-0,199		0,546	0,121	1		0,283	0,147
Brescia		-0,394				0,460		-0,417	1	-0,356	
Sondrio					-0,323			0,485		1	
Mantova	0,296									0,172	1

I Minimi Quadrati a Due Stadi in serie spazio-temporali con effetto simultaneo

Le stime dei coefficienti spazio-temporali relativi ai ritardi di ordine 1 e 2, mettono in luce tre differenti caratteristiche del sistema spaziale considerato.

Un primo aspetto è relativo al fatto che – passando ai ritardi di ordine 1 e 2 – la struttura delle relazioni tra le province si modifica, in particolare il numero dei coefficienti relativi agli effetti spazio-temporali si riduce sensibilmente rispetto a quello stimato per gli effetti contemporanei.

Il secondo riguarda invece la non simmetria degli effetti che caratterizza fortemente l'insieme delle relazioni fra le diverse province, mentre il terzo è relativo alla provincia di Milano che si presenta come l'unica provincia che “assorbe” gli effetti del fatturato realizzato nell'intera regione un mese o due mesi prima. A conferma delle ipotesi iniziali, essa si configura quindi come polo di attrazione per le attività delle imprese lombarde.

Tabella 1b. – Le stime dei coefficienti spazio-temporali di ordine 1 ottenute con i Minimi Quadrati a Due Stadi

A1	Milano	Lodi	Como	Pavia	Lecco	Bergamo	Varese	Cremona	Brescia	Sondrio	Mantova
Milano	0,311	-0,183				0,178		-0,266			
Lodi	0,619							0,659	-0,186		
Como	-2,298										
Pavia	2,492										
Lecco	5,672		0,551	0,537	0,816				-0,162		-0,817
Bergamo	-1,375					0,777		-1,266			
Varese	-1,766									0,325	
Cremona	-0,393	-0,151								-0,079	-0,291
Brescia	1,074					0,601		1,349			
Sondrio						-0,167					0,197
Mantova		0,370				-0,244		0,160			0,134

Sulla stessa serie spazio-temporale considerata per l'applicazione dei Minimi Quadrati a Due Stadi, si sono calcolate le stime di Massima Verosimiglianza dei parametri incogniti del modello (Naccarato, 2001a;

Naccarato, 2001b). I risultati ottenuti in questo caso sono riportati nelle Tabelle 2a, 2b e 2c.

Dal confronto di questi risultati con quelli ottenuti nelle Tabelle 1a, 1b e 1c, si osserva subito che, a prescindere dalla struttura delle relazioni ovvero del legame spaziale tra le province, le stime di Massima Verosimiglianza stimano un numero di coefficienti nettamente inferiore, sia con riferimento agli effetti autoregressivi che a quelli spazio-temporali.

Tabella 1c. – Le stime dei coefficienti spazio-temporali di ordine 2 ottenute con i Minimi Quadrati a Due Stadi

A2	Milano	Lodi	Como	Pavia	Lecco	Bergamo	Varese	Cremona	Brescia	Sondrio	Mantova
Milano	0,731		0,072	-0,024		0,262		0,398	0,296		0,539
Lodi		0,350					0,443	-0,951			
Como		0,983			0,295						
Pavia		-1,454									-1,213
Lecco		-5,514			-0,450						
Bergamo		1,722		-0,134			-0,107	0,721			1,561
Varese		-0,225						0,306			
Cremona		0,765				0,248		0,531	0,726		1,414
Brescia		-1,121	0,127					-1,336			-0,332
Sondrio			-0,250			-0,311				-0,174	
Mantova		-0,612				-0,232			-0,381	0,073	-1,146

In particolare, dal confronto tra le due matrici degli effetti simultanei si osserva che la situazione colta dai Minimi Quadrati a Due Stadi si presenta molto più articolata di quella evidenziata dalle stime di Massima Verosimiglianza; due casi emblematici possono essere considerati quelli delle province di Cremona e di Bergamo. Nel primo caso il numero delle province che esercitano la loro influenza su Cremona risulta pari a cinque con i Minimi Quadrati a Due Stadi, mentre è pari a tre con le stime di Massima Verosimiglianza. Nel secondo caso l'influenza esercitata dalla provincia di Bergamo sulle altre province è relativa a sette di esse nel caso dei Minimi Quadrati a

Tabella 2c. – Le stime di Massima Verosimiglianza dei coefficienti spazio-temporali di ordine 2

A2	Milano	Lodi	Como	Pavia	Lecco	Bergamo	Varese	Cremona	Brescia	Sondrio	Mantova
Milano	0,120										-0,242
Lodi	0,222				-0,162			-0,227		0,204	
Como											
Pavia					0,127			-0,479			-1,161
Lecco	-0,536									-0,217	
Bergamo	0,868	0,081									1,510
Varese								0,265			
Cremona											0,511
Brescia	-0,766										-0,260
Sondrio	-0,679		-0,114								
Mantova											-0,343

8. Conclusioni

Il modello presentato, assume caratteristiche di generalità anche perché non si sono formulate ipotesi a priori circa il fatto che le relazioni spaziali che intercorrono tra i siti del sistema considerato, possano essere funzioni della distanza; ci si è posti pertanto in una situazione più generale rispetto a quella in cui si pongono solitamente i modelli spaziali e spazio-temporali, nei quali usualmente si fa uso di un sistema di pesi che è funzione della distanza fra i siti.

Nell'ottica pertanto di considerare una formulazione più generale possibile di un modello spazio-temporale si è incluso nel modello proposto, l'effetto spaziale simultaneo la cui considerazione pone problemi di stima legati alla non consistenza dei Minimi Quadrati Ordinari. Il metodo qui proposto è quello dei Minimi Quadrati a Due Stadi, che supera l'ostacolo dando luogo a stime consistenti. Il vantaggio legato all'uso di tale metodo - oltre alla semplicità da un punto di vista computazionale - è quello di non essere vincolato ad alcuna ipotesi sulla distribuzione della componente accidentale. L'ipotesi di normalità sottostante l'utilizzo delle stime di Massima Verosimiglianza è infatti

molto poco credibile, così che - a nostro avviso - è preferibile non essere costretti ad introdurla.

Riferimenti Bibliografici

Deutsch S. J., Pfeifer P. E. (1980), A three-stage iterative procedure for space-time modeling, *Technometrics*, 22, 35-47.

Deutsch S. J., Pfeifer P. E. (1981), Space-time ARMA modeling with contemporaneously correlated innovations, *Technometrics*, 23, 401-409.

Elhorst J. I. (2001), Dynamic models in space and time, *Geographical Analysis*, 33, 119-140.

Hamilton J. D. (1994), *Time series analysis*, Princeton University Press, Princeton New Jersey.

Naccarato A. (1999), Una matrice di pesi direzionali per lo studio della variabilità spatio-temporale della radiazione solare, *Quaderni del Dipartimento di Statistica Probabilità e Statistica Applicata - SERIE A*, Università degli Studi "La Sapienza".

Naccarato A. (2001a), Uno studio sulla diffusione di fenomeni meteorologici mediante particolari modelli spatio-temporali, *Working Paper* n°22, Dipartimento di Economia, Università degli Studi Roma Tre.

Naccarato A. (2001b), *Modelli VAR per strutture spatio-temporali*, Tesi di Dottorato non pubblicata, Università degli studi di "Roma Tre", Facoltà di Economia.

Terzi S. (1995), Maximum Likelihood Estimation of Generalized STAR (p, I_p) Model, *Journal of the Italian Statistical Society*, 4, 377-393.