

## **Una generalizzazione del metodo L.O.D.E. per la stima dei parametri strutturali di un sistema di equazioni simultanee**

**Giacomo Sbrana**

*Dipartimento di Economia, Università degli Studi "Roma Tre"*  
*E-mail: sbrana@uniroma3.it*

*Summary:* The aim of this paper is to introduce a new estimator for the structural parameters of simultaneous equations models called "Generalized Least Orthogonal Distance Estimator" (GLODE). Based on characteristic roots and vectors of a matrix related to the so called over-identifying restrictions, this new method is an extension of the Least Orthogonal Distance Estimator (LODE).

After reworking the notation and stressing the main problems in structural parameters estimation, GLODE is introduced in the context of limited information methods. The study has been performed by simulations with a Monte Carlo procedure to compare the GLODE with the LODE, the Two Stages Least Squares (2SLS) and the Limited Information Maximum Likelihood (LIML).

*Keywords:* Orthogonal distance, Monte Carlo simulation, Structural parameters

### ***1. Introduzione***

La stima dei parametri strutturali di un sistema di equazioni simultanee rappresenta uno degli argomenti più interessanti dell'econometria, non solo per l'importanza che viene attribuita all'analisi simultanea delle interazioni tra i singoli elementi di un sistema, ma anche per i problemi legati ai metodi da utilizzare per la stima di tali parametri. Diversi sono stati i contributi forniti dagli econometrici negli ultimi anni nello sviluppare nuovi metodi di stima

che hanno arricchito la letteratura ed offerto utili strumenti di analisi empirica.

Lo scopo principale di questo lavoro è quello di presentare un nuovo metodo di stima dei parametri strutturali di un sistema di equazioni simultanee, frutto di uno sviluppo teorico del metodo di minima distanza ortogonale (*L.O.D.E.*) già proposto in letteratura (Pieraccini, 1988).

Questo nuovo metodo di stima ad informazione limitata denominato "Generalized Least Orthogonal Distance Estimator" (*G.L.O.D.E.*) utilizza, come anche il metodo *L.O.D.E.*, la metodologia della minimizzazione della distanza ortogonale come alternativa al metodo dei minimi quadrati (Pearson, 1901). L'idea di utilizzare questo tipo di metodologia scaturisce infatti dall'impossibilità di ottenere stime consistenti dei parametri strutturali di un sistema di equazioni simultanee attraverso il metodo classico dei minimi quadrati.

Dopo una breve introduzione sulla simbologia e sui problemi legati ai sistemi di equazioni simultanee (par.2) vengono messe in evidenza le condizioni di identificazione nel caso generalizzato (par.3). Successivamente, dopo aver introdotto alcune considerazioni da cui trae spunto lo stimatore *G.L.O.D.E.*, viene illustrato lo sviluppo teorico che porta alle stime *G.L.O.D.E.* (par.4). Infine (par.5), vengono confrontate le performance del metodo *G.L.O.D.E.* con quelle di altri metodi di stima attraverso una simulazione Monte Carlo.

## ***2. Sistemi di equazioni simultanee***

La forma strutturale di un sistema lineare di equazioni simultanee può essere scritta come:

$$Y\Gamma + XB + U = 0 \quad (1)$$

dove  $Y$  è la matrice delle  $(N, M)$  delle  $N$  osservazioni sulle  $M$  variabili endogene,  $X$  è la matrice  $(N, K)$  delle  $N$  osservazioni sulle  $K$  variabili esogene,  $U$  la matrice delle  $N$  osservazioni sulle  $M$  variabili casuali,  $\Gamma$  è la matrice  $(M, M)$  dei coefficienti relativi alle variabili endogene, e  $B$  è la matrice  $(K, M)$  dei coefficienti relativi alle variabili esogene.

Supponendo che la matrice  $\Gamma$  sia non singolare, allora la (1) può essere scritta nella seguente forma ridotta:

$$Y = X\Pi + V \quad (2)$$

dove è:

$$\begin{aligned} \Pi &= -B\Gamma^{-1} \\ V &= -U\Gamma^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

La specificazione del modello comporta, inoltre, le seguenti assunzioni sugli elementi stocastici del sistema:

$$E(U) = 0 \quad \text{e} \quad E(U^T U) = \Omega \quad (4)$$

che, per la forma ridotta (2), diventano:

$$E(V) = 0 \quad \text{e} \quad E(V^T V) = (\Gamma^{-1})^T \Omega \Gamma^{-1} \quad (5)$$

Essendo le variabili endogene  $Y$  correlate con la componente accidentale, le stime O.L.S. della (1) saranno non consistenti. Proprio per superare tale difficoltà, sono stati proposti numerosi metodi di stima, i quali, pur dando luogo a stime distorte, presentano la caratteristica della consistenza.

### 3. Condizioni per l'identificazione dei parametri strutturali nel caso generalizzato

Come è noto, la prima relazione delle (3), che rappresenta il legame tra i parametri della forma ridotta e quelli della forma strutturale può essere riscritta, per la  $i$ -esima equazione, come:

$$\begin{aligned}\Pi_1 \Gamma_i &= -B_i \\ \Pi_2 \Gamma_i &= 0\end{aligned}\quad (6)$$

dove  $\Gamma_i$  e  $B_i$  sono, rispettivamente, i vettori di ordine  $M_1$  e  $K_1$  delle sole variabili endogene ed esogene presenti nell' $i$ -esima equazione, mentre  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  sono le matrici dei coefficienti della forma ridotta relativi alle variabili endogene incluse e alle variabili esogene in essa rispettivamente incluse ed escluse.

Il sistema (6) può essere illustrato in forma matriciale nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & I \\ \Pi_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_i \\ B_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (7)$$

Come primo passo dimostriamo quali sono le condizioni di rango nel caso in cui generalizziamo la stima dei parametri sia ai  $\Gamma$  che ai  $B$ .

Se poniamo:

$$\Pi_E = \begin{bmatrix} \Pi_1 & I \\ \Pi_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} \Gamma_i \\ B_i \end{bmatrix}\quad (8)$$

possiamo allora concentrare l'attenzione sul seguente sistema omogeneo:

$$\Pi_E \mathbf{d}_i = 0\quad (9)$$

Poiché le incognite sono  $M_1+K_1$ , esso avrà una soluzione univoca e non banale, a meno di un coefficiente di proporzionalità, se e solo se  $\rho(\Pi_E) = M_1 - 1 + K_1$ .

La matrice composta  $\Pi_E$  dei parametri della forma ridotta è una matrice che ha  $K_1+K_2$  righe e  $M_1+K_1$  colonne, la quale, mettendo in evidenza i vettori dei blocchi, può essere rappresentata nella seguente maniera:

$$\Pi_E = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \Pi_{1,1} & \cdots & \Pi_{1,M_1} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \Pi_{K_1,1} & \cdots & \Pi_{K_1,M_1} & 0 & 0 & 1 \\ \hline \Pi_{K_1+1,1} & \cdots & \Pi_{K_1+1,M_1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \Pi_{K_1+K_2,1} & \cdots & \Pi_{K_1+K_2,M_1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (10)$$

### Teorema

Condizione necessaria affinché il rango  $\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{O}}_E) = M_1 - 1 + K_1$  è che  $\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{O}}_2) \geq M_1 - 1$ .

La condizione  $\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{O}}_2) = M_1 - 1$  è anche condizione sufficiente.

### Dimostrazione

Poiché per le matrici composte vale la regola secondo la quale:

$$\mathbf{r} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \leq \mathbf{r}(\mathbf{A}) + \mathbf{r}(\mathbf{B})$$

avremo allora che:

$$\mathbf{r}(\Pi_E) \leq \mathbf{r} \begin{pmatrix} \Pi_1 & \mathbf{I}_{K_1} \end{pmatrix} + \mathbf{r} \begin{pmatrix} \Pi_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Ma poiché il blocco con la matrice identità ha sempre rango pieno di riga, allora la (11) viene rispettata sia nel caso in cui  $\rho(\Pi_2) = M_1 - 1$  che nel caso in cui  $\rho(\Pi_2) = M_1$ .

La condizione  $\rho(\Pi_2) = M_1 - 1$  è anche sufficiente, infatti, uno qualsiasi degli  $M_1 - 1 + K_1$  vettori colonna della matrice  $\Pi_E$  non sarà combinazione lineare degli altri  $M_1 - 1 + K_1$  vettori, poiché se anche la partizione superiore è sempre combinazione lineare della matrice  $\mathbf{I}_{k_1}$ , la partizione inferiore non è mai combinazione lineare della matrice  $\mathbf{0}$  né degli altri  $M_1 - 1$  vettori della matrice  $\Pi_2$  che per ipotesi ha rango uguale a  $M_1 - 1$ .

Sappiamo però che, non conoscendo la matrice  $\Pi_E$  ma solo quella in cui figurano le stime dei parametri della forma ridotta, si ricorre alle cosiddette condizioni d'ordine che riguardano il numero delle equazioni e delle incognite del sistema (9).

Se concentriamo l'attenzione sul sistema (9), il numero delle equazioni presenti nel sistema è uguale a  $K$ , (numero delle variabili esogene escluse più il numero delle variabili esogene incluse dalla  $i$ -esima equazione, oggetto di identificazione), mentre il numero delle incognite è  $M_1 + K_1$  (numero delle variabili endogene ed esogene in essa presenti), e, normalizzando rispetto al coefficiente di una delle variabili endogene, in genere ponendolo uguale a  $-1$  in modo da considerare tale variabile come funzione delle altre, si riduce il numero delle incognite da stimare ad  $(M_1 - 1 + K_1)$ .

La (9) diventa pertanto un sistema di  $K$  equazioni in  $M_1 - 1 + K_1$  incognite.

Quindi se è:

$$K < M_1 - 1 + K_1 \quad (12)$$

allora il numero delle equazioni risulta inferiore al numero delle incognite ed il sistema ammette infinite alla  $K_2 - (M_1 - 1)$  soluzioni.

Questo caso corrisponde ovviamente al caso di sotto identificazione.

Se al contrario è:

$$K = M_1 - I + K_1 \quad (13)$$

allora il sistema ammette una soluzione univoca trattandosi di un sistema non omogeneo di  $(M_1-1+K_1)$  equazioni in  $(M_1-1+K_1)$  incognite.

Infine qualora sia:

$$K > M_1 - I + K_1 \quad (14)$$

allora il numero delle equazioni è superiore al numero delle incognite. In tali condizioni, quando cioè il numero delle variabili esogene escluse più il numero delle esogene incluse dall'equazione che si considera è maggiore del numero delle endogene incluse più il numero delle esogene incluse, ci troviamo nel caso di sovra identificazione, che è il caso più frequente nella stima dei parametri della forma strutturale.

In questo ultimo caso non è più possibile procedere alla stima dei parametri strutturali attraverso i minimi quadrati indiretti, ma bisognerà ricorrere a metodi di stima alternativi.

In conclusione:

*a) Condizioni di rango per l'identificazione nel caso generalizzato.*

Condizione necessaria affinché i parametri delle equazioni strutturali siano identificati è che  $\rho(\Pi_2) \geq M_1-1$ . La condizione  $\rho(\Pi_2) = M_1-1$  oltre che necessaria è anche sufficiente

*b) Condizione d'ordine per l'identificazione nel caso generalizzato.*

Nei sistemi di equazioni simultanee, condizione necessaria affinché i parametri dell'equazione strutturale siano identificati è che  $K_2 \geq M_1-1$ .

#### 4. Il metodo di minima distanza ortogonale generalizzato

Per analizzare lo sviluppo teorico del metodo di minima distanza ortogonale generalizzato riconsideriamo la (6). Come abbiamo osservato nel paragrafo precedente, non potendo conoscere i valori delle matrici  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  ma solo quelli delle stime di tali parametri, riscriviamo la (6) sostituendo le stime dei parametri della forma ridotta ai valori "veri" in modo da ottenere:

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_1 \Gamma_i &= -B_i + \mathbf{e}_1 \\ \hat{\Pi}_2 \Gamma_i &= \mathbf{e}_2\end{aligned}\quad (15)$$

dove:

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T U_i \quad (16)$$

sono gli errori presenti nel sistema di equazioni complessivo con le seguenti caratteristiche (Pieraccini, 1969):

$$E(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E(U_i) = 0 \quad (17)$$

$$E(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E(U_i U_i^T) \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \mathbf{s}_i^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad (18)$$

possiamo dunque riscrivere la (15) come segue:

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_1 & \mathbf{I} \\ \hat{\Pi}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_i \\ B_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

ovvero:

$$\hat{\Pi}_E \mathbf{d}_i = \mathbf{e}_i \quad (20)$$

Nella (18) abbiamo osservato come gli errori  $\varepsilon_i$  dell'equazione strutturale non sono tra loro incorrelati. Risulta quindi necessario trovare una trasformazione che li renda tali.

Se consideriamo il teorema della decomposizione spettrale di una matrice simmetrica possiamo considerare:

$$(X^T X) = T\Lambda^{-1}T^T = T\Lambda^{\frac{1}{2}}T^T T\Lambda^{-\frac{1}{2}}T^T = H^2 \quad (21)$$

dove  $T$  e  $\Lambda$  sono rispettivamente le matrici degli autovettori ed autovalori di  $(X^T X)$ .

Allora la trasformazione  $H\mathbf{e}_i$  è la trasformazione cercata in quanto:

$$E(H\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T H^T) = HE(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T)H^T = \mathbf{s}_i^2 H(X^T X)^{-1} H^T = \mathbf{s}_i^2 \mathbf{I}_K \quad (22)$$

Pertanto, pre-moltiplicando la (20) per  $H$  e ponendo:

$$V = H \hat{\Pi}_E \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = H \mathbf{e}_i \quad (23)$$

si ha

$$V\mathbf{d}_i = \mathbf{f} \quad (24)$$

dove avremo:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{f}^T \mathbf{f}) &= E\{(\mathbf{d}_i)^T V^T V \mathbf{d}_i\} = \\ &= E\{(\mathbf{d}_i)^T (\hat{\Pi}_E)^T (X^T X) \hat{\Pi}_E \mathbf{d}_i\} = \text{tr}(\mathbf{s}_i^2 \mathbf{I}_K) = K\mathbf{s}_i^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Per cui il problema della stima di  $\mathbf{d}_i$  può essere ricondotto al problema di trovare il vettore che minimizza la (25), cioè, che

minimizza la varianza dell'errore (seguendo la metodologia della minima distanza ortogonale proposta da K. Pearson).

Se allora poniamo:

$$S = V^T V = (\hat{\Pi}_E)^T (X^T X) \hat{\Pi}_E \quad (26)$$

una stima di  $\mathbf{d}$  si ottiene minimizzando la quantità:

$$\mathbf{d}^T S \mathbf{d} = \min \quad (27)$$

con l'unica condizione  $\mathbf{d}^T \mathbf{d} = 1$  che assicura l'unicità della soluzione.

Si tratta, pertanto, di un problema di minimo vincolato che può essere risolto utilizzando la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ovvero minimizzando la funzione:

$$F(\mathbf{d}, \Theta) = \mathbf{d}^T S \mathbf{d} - \mathbf{1}(\mathbf{d}^T \mathbf{d} - 1) \quad (28)$$

ed eguagliando a zero le derivate parziali della (28) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{d}} = 2S\mathbf{d} - 2\mathbf{1}\mathbf{d} = 0 & \quad \rightarrow \quad (S - \mathbf{1}\mathbf{1})\mathbf{d} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{1}} = \mathbf{d}^T \mathbf{d} - 1 = 0 & \quad \rightarrow \quad \mathbf{d}^T \mathbf{d} = 1 \end{aligned} \quad (29)$$

Abbiamo così che la seconda delle (29) ci rappresenta il vincolo, mentre la prima ammette soluzioni se e solo se:

$$|S - \mathbf{1}\mathbf{1}| = 0 \quad (30)$$

che è l'equazione caratteristica della matrice S.

Quindi il vettore  $\hat{\mathbf{d}}_i$  che minimizza la (28) è l'autovettore associato al più piccolo autovalore della matrice<sup>1</sup>  $S$ , cioè:

$$\hat{\mathbf{d}}_i = \mathbf{d}_{M_1+K_1} \quad (31)$$

A questo punto, dopo aver scelto la variabile endogena con coefficiente uguale a  $-1$  si normalizza il vettore  $\hat{\mathbf{d}}_i$  ottenendo i coefficienti delle variabili endogene e delle variabili esogene presenti nell' $i$ -esima equazione. Si ottiene così un vettore:

$$\hat{\mathbf{d}}_i = \begin{pmatrix} -1 \\ \hat{\Gamma}_i \\ \hat{\mathbf{B}}_i \end{pmatrix} \quad (32)$$

Nel caso di esatta identificazione si avrà che il rango di  $S$  sarà:

$$\mathbf{r}(S) = M_I - I + K_I \quad (33)$$

e quindi il più piccolo autovalore sarà:

$$\mathbf{I}_{M_1+K_1} = 0 \quad (34)$$

in questo caso il vettore  $\hat{\mathbf{d}}_i$  coinciderà con le stime dei minimi quadrati indiretti normalizzando rispetto alla variabile endogena con coefficiente uguale a  $-1$ .

Il punto fondamentale dell'analisi che modifica l'impostazione del metodo *L.O.D.E.* risiede proprio nella generalizzazione del metodo di stima a tutti i parametri del sistema. Il metodo *L.O.D.E.*, infatti, concentra l'attenzione sulla partizione inferiore del sistema (15):

---

<sup>1</sup> Essendo la matrice  $S$  simmetrica e definita positiva (di dimensione  $M_1+K_1$ ), essa avrà tutti gli autovalori reali e positivi.

$$\hat{\Pi}_2 \Gamma_i = \mathbf{e}_2 \quad (35)$$

dove compaiono i parametri  $\Gamma$ , relativi alle variabili endogene, ma non i parametri  $B$ . Seguendo questo diverso approccio, il metodo L.O.D.E. stima inizialmente i parametri relativi alle variabili endogene, che compaiono come variabili esplicative nella  $i$ -esima equazione del sistema, attraverso la metodologia della minimizzazione della distanza ortogonale, minimizzando la seguente forma quadratica:

$$\Gamma_i^T (\hat{\Pi}_2)^T R_{22}^{-1} \hat{\Pi}_2 \Gamma_i = \min \quad (36)$$

dove  $R_{22}$  è definita dalla partizione della matrice  $(X^T X)^{-1}$ :

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad (37)$$

e si riferisce quindi alle variabili esogene escluse dalla  $i$ -esima equazione.

Successivamente le stime vengono inserite nell'equazione presa in considerazione per stimare i parametri relativi alle variabili esogene attraverso i minimi quadrati, come segue:

$$\hat{B}_i = -(X_i^T X_i)^{-1} X_i^T Y_i \hat{\Gamma}_i \quad (38)$$

dove con  $X_i$  e  $Y_i$  si sono indicate rispettivamente le variabili esogene ed endogene presenti nella  $i$ -esima equazione.

## ***5. Un esperimento di simulazione***

Al fine di analizzare quali sono le caratteristiche del metodo G.L.O.D.E. e di confrontare tali caratteristiche con altri metodi di stima ad informazione limitata è stata effettuata una simulazione con il metodo Monte Carlo.

L'approccio Monte Carlo consiste nell'ipotizzare un modello strutturale e nello specificare a priori i valori dei parametri e delle matrici di varianze e covarianze degli errori della forma strutturale: attraverso la generazione di numeri casuali provenienti dalla distribuzione ipotizzata per gli errori si ottengono i valori delle componenti accidentali della forma ridotta e, da questi e dai valori delle variabili esogene, si calcolano i valori delle variabili endogene e si applicano, in ogni campione, i metodi di stima in esame.

Dall'esame delle stime ottenute con i diversi metodi in un numero sufficientemente elevato di campioni, si cerca quindi di ottenere indicazioni sulle caratteristiche degli stimatori considerati e se ne confrontano pregi e difetti. Tali esperimenti permettono inoltre di valutare le "performance" dei diversi stimatori in relazione a particolari strutture delle componenti accidentali presenti nel modello.

Nella simulazione che è stata effettuata, sono stati messi a confronto i metodi T.S.L.S. , L.I.M.L, L.O.D.E. e G.L.O.D.E..

Il primo passo per svolgere una simulazione Monte Carlo sta nella scelta del modello di equazioni simultanee sul quale operare gli esperimenti. Nello stabilire il modello del nostro esperimento si è ritenuto utile ricorrere ad una struttura già utilizzata in alcuni esperimenti condotti negli anni sessanta da Cragg (1967). L'esperimento preso in considerazione considera un sistema di tre equazioni strutturali con tre variabili endogene e sette variabili esogene. Una caratteristica del modello è che le tre equazioni sono sovra-identificate.

Il sistema può essere rappresentato come segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} \\ \mathbf{b}_{21} & 1 & \mathbf{b}_{23} \\ \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & 0 & 0 & \mathbf{g}_{15} & 0 & 0 \\ \mathbf{g}_{21} & 0 & \mathbf{g}_{23} & 0 & \mathbf{g}_{25} & 0 & \mathbf{g}_{27} \\ \mathbf{g}_{31} & 0 & \mathbf{g}_{33} & \mathbf{g}_{34} & 0 & \mathbf{g}_{36} & 0 \end{pmatrix} x + u \quad (39)$$

dove i **B G** sono i parametri strutturali relativi rispettivamente alle variabili endogene e alle variabili esogene.

Per quanto riguarda il valori veri dei parametri del modello considerato essi vengono riportati nella Tabella 1.

*Tabella 1. Parametri strutturali*

1° equazione	2° equazione	3° equazione
$\beta_{12} = 0.89$	$\beta_{21} = 0.74$	$\beta_{32} = 0.29$
$\beta_{13} = 0.16$	$\gamma_{21} = 62$	$\gamma_{31} = 40$
$\gamma_{11} = 44$	$\gamma_{23} = 0.70$	$\gamma_{33} = 0.53$
$\gamma_{12} = 0.74$	$\gamma_{25} = 0.96$	$\gamma_{34} = 0.11$
$\gamma_{15} = 0.13$	$\gamma_{27} = 0.06$	$\gamma_{36} = 0.56$

Riguardo invece alla struttura della matrice di varianze e covarianze degli errori della forma strutturale sono state utilizzate le seguenti strutture:

*Tabella 2. Strutture degli errori*

1° Struttura degli errori	2° Struttura degli errori
$\sigma_{11} = 35.24$	$\sigma_{11} = 11.24$
$\sigma_{12} = 34.48$	$\sigma_{12} = 2.32$
$\sigma_{13} = 31.12$	$\sigma_{13} = -1.24$
$\sigma_{22} = 36.68$	$\sigma_{22} = 16.20$
$\sigma_{23} = 29.84$	$\sigma_{23} = 2.96$
$\sigma_{33} = 40.64$	$\sigma_{33} = 9.60$

L'esperimento è stato condotto secondo lo schema riportato nella Tabella 2, nel quale per ogni struttura di errori della forma strutturale e per ogni numerosità campionaria (N=20,30,50,100,500,1000,10000) sono state effettuate 300 stime relative a ciascun parametro.

Per ogni parametro presente nel modello si è così ottenuta una distribuzione delle stime T.S.L.S., L.I.M.L., L.O.D.E. e G.L.O.D.E. relative alle diverse strutture degli errori e numerosità campionarie.

La scelta di considerare così tante numerosità campionarie e, in particolare, di arrivare a considerare valori molto elevati, come N =10000, è legata al fatto che, mentre per i metodi T.S.L.S., L.I.M.L., L.O.D.E. sono ormai note le proprietà asintotiche (Perna, 1988), per il metodo G.L.O.D.E. sono ancora sconosciute tali proprietà.

I risultati della simulazione sono stati sintetizzati (vedi Tabelle 3 e 4) utilizzando come indicatori il quadrato della distorsione e l'errore quadratico medio. Tali indicatori sono stati poi sommati (per ciascuno dei 12 parametri) dando luogo ai seguenti indici:

$$SQD = \sum_{j=1}^{12} \left[ \frac{1}{300} \sum_{i=1}^{300} (\hat{\mathbf{d}}_{ij} - \mathbf{d}_{ij}) \right]^2 \quad (40)$$

$$MSE = \sum_{j=1}^{12} \left[ \frac{1}{300} \sum_{i=1}^{300} (\hat{\mathbf{d}}_{ij} - \mathbf{d}_{ij})^2 \right] \quad (41)$$

Sono state escluse dall'analisi le costanti relative alle tre equazioni sovraidentificate poiché, essendo i suddetti valori particolarmente elevati rispetto agli altri parametri, la loro inclusione avrebbe inficiato i risultati stessi della simulazione.

Inoltre, la distribuzione di ciascuno dei 12 parametri è stata sottoposta al test sulla normalità di Jarque-Bera (1981). Per ogni numerosità campionaria, nelle Tabelle 3 e 4, viene indicato il numero di parametri per i quali non si rifiuta l'ipotesi di normalità.

Tabella 3. Risultati della simulazione (1° Struttura degli errori)

1° Struttura	T.S.L.S.	L.I.M.L.	L.O.D.E.	G.L.O.D.E.
N=20				
MSE	0.0506011	0.0511918	0.0841591	0.0628074
SQD	0.0011962	0.0015411	0.0044475	0.0003693
Normalità (n. parametri)	6	6	4	6
N=30				
MSE	0.0322497	0.0322805	0.0552774	0.0348788
SQD	0.0001753	0.0002181	0.0003882	0.0004905
Normalità (n. parametri)	7	6	4	6
N=50				
MSE	0.0214772	0.0214512	0.0392333	0.0228724
SQD	0.0000943	0.0001309	0.0004136	0.0001662
Normalità (n. parametri)	9	8	7	8
N=100				
MSE	0.0094425	0.009441	0.0119458	0.009824
SQD	0.00001867	0.00002516	0.0000845	0.0000969
Normalità (n. parametri)	10	11	10	10
N=500				
MSE	0.0018229	0.0018241	0.0021254	0.0018256
SQD	0.00000294	0.00000272	0.00000652	0.00000402
Normalità (n. parametri)	12	12	12	12
N=1000				
MSE	0.0009439	0.0009437	0.0010871	0.0009476
SQD	0.00000274	0.0000025	0.00000468	0.00000879
Normalità (n. parametri)	12	12	12	12
N=10000				
MSE	0.0000095	0.0000095	0.0000111	0.0000084
SQD	0.00000021	0.00000020	0.00000028	0.00000026
Normalità (n. parametri)	12	12	12	12

Tabella 4. Risultati della simulazione (2° Struttura degli errori)

2° Struttura	T.S.L.S.	L.I.M.L.	L.O.D.E.	G.L.O.D.E.
N=20				
MSE	0.0091479	0.0091535	0.0120304	0.009266
SQD	0.00002459	0.00003112	0.0000517	0.00003474
Normalità (n. parametri)	8	7	6	8
N=30				
MSE	0.005231	0.0052245	0.0067292	0.0052764
SQD	0.00004393	0.00005174	0.00004420	0.00002993
Normalità (n. parametri)	7	7	6	7
N=50				
MSE	0.0028994	0.0028774	0.003183	0.0028964
SQD	0.00000925	0.00000885	0.00001128	0.00001460
Normalità (n. parametri)	9	9	8	8
N=100				
MSE	0.0013876	0.0013876	0.0016658	0.00139341
SQD	0.00000215	0.00000237	0.00000354	0.00000068
Normalità (n. parametri)	10	10	9	10
N=500				
MSE	0.0002519	0.0002518	0.0002973	0.0002518
SQD	0.00000082	0.00000081	0.00000003	0.00000076
Normalità (n. parametri)	12	12	12	12
N=1000				
MSE	0.0001344	0.0001344	0.0001548	0.0001347
SQD	0.00000021	0.00000021	0.00000036	0.00000025
Normalità (n. parametri)	12	12	12	12
N=10000				
MSE	0.0000127	0.0000128	0.0000147	0.0000126
SQD	0.00000003	0.00000003	0.00000002	0.00000003
Normalità (n. parametri)	12	12	12	12

E' possibile notare dai risultati della simulazione che sia la somma delle distorsioni che la somma degli errori quadratici medi relativi al metodo G.L.O.D.E. convergono a zero al crescere della numerosità campionaria. Questo risultato è molto importante poiché mette in evidenza che, così come gli altri metodi di stima, anche il metodo di minima distanza ortogonale generalizzato gode della proprietà asintotica della consistenza.

Per quanto riguarda i risultati relativi alla prima struttura di errori, i metodi T.S.L.S. e L.I.M.L. sono quelli che in generale riportano i valori più bassi del MSE e della SQD. Si può però evidenziare, con riferimento alla tabella relativa alla prima struttura, come i valori dell'MSE relativi al metodo G.L.O.D.E. differiscono di molto poco dagli stessi valori relativi ai T.S.L.S. e al L.I.M.L. per N superiore a 20. E' inoltre interessante notare che per N=20 il metodo G.L.O.D.E. riporta il valore più basso con riferimento alle SQD, e che, nel confronto bilaterale con il metodo L.O.D.E., il metodo G.L.O.D.E. riporta i valori più bassi del MSE per tutte le numerosità campionarie e i valori più bassi della SQD per N=20,50,500,10000.

Facendo riferimento ai risultati riportati nella seconda struttura di errori è possibile notare come i valori relativi al MSE dei metodi T.S.L.S., L.I.M.L. e G.L.O.D.E. siano quasi coincidenti anche se i metodi T.S.L.S. e L.I.M.L. continuano a riportare i valori più bassi.

Per quanto riguarda invece i risultati relativi alle SQD notiamo come il metodo G.L.O.D.E. riporta il valore più basso<sup>2</sup> per N=30. Questo risultato è di particolare interesse poiché, come anche nella prima struttura di errori, mette in evidenza come il metodo G.L.O.D.E. abbia buone caratteristiche nei piccoli campioni, che sono quelli più utilizzati nelle analisi econometriche. Infine, per quanto riguarda il confronto bilaterale con il L.O.D.E., il G.L.O.D.E. riporta l'MSE più basso in tutti i campioni e le SQD più basse per N=20,30,100,1000.

---

<sup>2</sup> Anche per N=100 il G.L.O.D.E. riporta la SQD minore.

## **6. Conclusioni**

L'approccio che generalizza il metodo della minima distanza ortogonale sembra, dalla simulazione effettuata, avere caratteristiche migliori rispetto al LODE, non solo nei piccoli campioni, ma anche nei campioni di ampiezza elevata. Inoltre, i vantaggi dal punto di vista della facilità di calcolo rendono il GLODE una valida alternativa ai metodi di stima ad informazione limitata.

## **Riferimenti Bibliografici**

Bera A., Jarque C. (1981) Efficient tests for normality, heteroscedasticity, and serial independence of regression residuals: Monte Carlo evidence", *Economics Letters*, 7, 313-318

Cragg J. G. (1967), On relative small-sample properties of several structural-equation estimators, *Econometrica* , 35 , 89-110

Pearson K. (1901), On lines and planes of closets fit to systems of points in the space, *Philosophical Magazine*, 2, 559-572

Perna C. (1988), La consistenza del metodo L.O.D.E. nei sistemi ad equazioni simultanee, *Quaderni di Statistica e Econometria*, X, 15-23

Pieraccini L. (1969), Su di un'interpretazione alternativa del metodo dei minimi quadrati a due stadi, *Statistica*, 4, 786-802

Pieraccini L. (1988), Il metodo L.O.D.E. per la stima dei parametri strutturali di un sistema di equazioni simultanee, *Quaderni di Statistica e Econometria* , X, 1-14