

Volatilità dei rendimenti e variazioni dei volumi degli scambi nei mercati finanziari: un'analisi empirica

Aride Mazzali

Dipartimento di Metodi Quantitativi, Università degli Studi di Brescia
E-mail: mazzali@eco.unibs.it

Summary: Aim of this article is to analyze from an empirical point of view the statistical structure and the relationships between financial time series of returns and trading volume changes. The main results obtained from the analysis of some stocks of the Italian financial market are the followings:

- a. both time series of returns and trading volume changes follow an ARMA-GARCH model;
- b. trading volume changes can be represented by a dynamic regression model with heteroskedastic disturbance, where the volatility of returns is assumed as an explicative variable.

Key words: ARMA-GARCH model, Conditional heteroskedasticity, Volatility of returns.

1. Introduzione

La ricerca e l'analisi di relazioni tra la volatilità dei prezzi ed i volumi degli scambi nei mercati finanziari è stata ed è tutt'oggi al centro di grande attenzione da parte degli studiosi di econometria, finanza e statistica (Andersen, 1996; Brooks, 1998).

La vasta letteratura sul tema si caratterizza da un lato per il tentativo più o meno esplicito di spiegare e prevedere la volatilità sfruttando le informazioni sui volumi, dall'altro per il fatto di dedurre

i modelli partendo da teorie economico finanziarie relative ai comportamenti di mercato (Clark, 1973; Tauchen-Pitts, 1983; Hsu, 1998).

Lo scopo di questo lavoro è quello di studiare la relazione tra volumi degli scambi e la volatilità dei rendimenti seguendo un'ottica puramente empirica. L'unica ipotesi accolta a priori concerne la possibilità che le serie considerate presentino una dinamica lineare sia nelle medie, sia nelle varianze condizionate. Ciò comporta che le operazioni di identificazione, stima e di diagnosi dell'accostamento risultino complesse. Per questo motivo abbiamo seguito una procedura iterativa che prevede tre fasi:

- i.* identificazione e stima di prima approssimazione del modello per la media condizionata ed analisi dei relativi residui;
- ii.* identificazione e stima di prima approssimazione del modello per la varianza condizionata ed analisi dei residui standardizzati;
- iii.* identificazione e stima simultanea con il metodo della pseudo massima verosimiglianza di tutti i parametri del modello completo ed analisi finale dei residui.

Nel paragrafo 2 sono illustrate le caratteristiche di autocorrelazione e di eteroschedasticità delle serie storiche finanziarie prese in considerazione. Una prima analisi statistica ci porterà nel paragrafo 3 sia a rappresentare efficacemente con modelli ARMA-GARCH le dinamiche delle medie e delle varianze condizionate per le singole serie, sia ad esplicitare le loro componenti condizionatamente eteroschedastiche, da cui ricaveremo gli indicatori di volatilità. Il paragrafo successivo proporrà un modello di regressione dinamica con disturbo eteroschedastico per descrivere la relazione tra le variazioni relative dei volumi e la volatilità delle variazioni dei prezzi. Le conclusioni sono riportate nel paragrafo 5.

2. Le serie storiche dei dati e le prime analisi

I dati considerati in questo lavoro sono costituiti dai valori delle quotazioni alla chiusura e dal numero di contratti giornalieri (volumi), relativi ai 3 titoli azionari: *Alleanza, Edison e Generali* dal 11-06-

1998 al 31-05-2000 (Borsa Italiana, S.p.a.), denotati rispettivamente con P_{it} e V_{it} , $i=1, 2, 3$; $t=1, 2, \dots, 501$; (Figura 1). Le corrispondenti serie stazionarie delle variazioni relative dei prezzi e dei volumi dp_{it} e dv_{it} , $i=1, 2, 3$; $t=1, 2, \dots, 500$; sono state ottenute applicando le differenze prime ai logaritmi neperiani dei dati originari. Infine, abbiamo considerato le dp_{it} una stima dei rendimenti composti (Campbell et al., 1997) mentre, abbiamo impiegato i quadrati dei valori ottenuti da un opportuno filtraggio lineare delle serie dp_{it} stesse quali indicatori di volatilità.

Per evidenziare le caratteristiche dinamiche delle medie condizionate delle singole serie dp_{it} e dv_{it} e delle coppie (dp_{it}, dv_{it}) , abbiamo calcolato in primo luogo le funzioni di auto e cross correlazione. Le prime mostrano una più o meno marcata dipendenza lineare tra termini immediatamente successivi (Figura 2); le seconde, invece, presentano valori non significativi per tutti i ritardi $k \neq 0$. Da ciò abbiamo dedotto che fosse appropriato un modello ARMA(p, q) solo per le singole serie.

Indicando con z_t la generica serie storica e con a_t il disturbo casuale, il modello ARMA(p, q) assume la forma:

$$\mathbf{f}(B)(z_t - \mathbf{m}) = \mathbf{q}(B)a_t \quad (1)$$

ove \mathbf{m} è la media, i polinomi nell'operatore di retrotraslazione B : $\mathbf{f}(B) = 1 - \mathbf{f}_1 B - \dots - \mathbf{f}_p B^p$ e $\mathbf{q}(B) = 1 - \mathbf{q}_1 B - \dots - \mathbf{q}_q B^q$, sono privi di fattori comuni e, ai fini rispettivamente della stazionarietà e della invertibilità, hanno radici esterne al cerchio di raggio unitario.

I residui:

$$a_t = \mathbf{q}(B)^{-1} \mathbf{f}(B)(z_t - \mathbf{m}) \quad (2)$$

che, con riferimento alle serie dp_{it} e dv_{it} nella fase preliminare sono stati denotati con u_{pit} e u_{vit} , servono sia per la diagnostica del modello ARMA accostato, sia per l'accertamento dell'assenza (presenza) di eteroschedasticità condizionale. A tale scopo abbiamo impiegato le statistiche $TR^2(i)$, $i=1, 2, 3, \dots$ (Hamilton, 1994) che, sotto l'ipotesi di assenza di eteroschedasticità condizionale di tipo autoregressivo, di

normalità $N(0, \mathbf{S}^2)$ e indipendenza dei residui stessi, sono asintoticamente distribuite come χ^2 con $u=i$ gradi di libertà.

Infine, per avere indicazioni sul comportamento della componente eteroschedastica, abbiamo calcolato sui quadrati dei residui anche le funzioni di autocorrelazione e le statistiche di Ljung-Box ($LB2$) (Tabella 1).

Tabella 1. Statistiche $LB2(12)$ e $TR^2(i)$.

| Titoli | Alleanza | | Edison | | Generali | |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | u_{p1t}^2 | u_{v1t}^2 | u_{p2t}^2 | u_{v2t}^2 | u_{p3t}^2 | u_{v3t}^2 |
| $LB2(12)$ | 47.38 | 8.79 | 67.03 | 26.50 | 80.85 | 23.16 |
| $TR^2(1)$ | 6.11 | 2.09 | 5.71 | 17.91 | 6.48 | 8.70 |
| $TR^2(2)$ | 7.88 | 2.88 | 11.71 | 18.16 | 19.31 | 8.77 |
| $TR^2(3)$ | 16.31 | 4.36 | 19.49 | 19.59 | 21.10 | 9.38 |
| $TR^2(12)$ | 28.67 | 7.85 | 41.76 | 27.19 | 47.35 | 21.82 |

Tutte le serie, ad eccezione di quella delle variazioni dei volumi relativa al titolo *Alleanza*, denunciano una più o meno accentuata eteroschedasticità condizionale di tipo autoregressivo.

Le evidenze emerse ci inducono a considerare per le nostre serie modelli ARMA-GARCH, con tale sigla intendendo modelli in cui le medie di z_t , condizionate all'informazione \mathbf{y}_{t-1} disponibile fino al tempo $t-1$, cioè: $E(z_t|\mathbf{y}_{t-1})$, sono rappresentate da processi ARMA(p,q), mentre le varianze condizionate $h_t = E(a_t^2|\mathbf{y}_{t-1})$ sono descritte da processi GARCH(r,s).

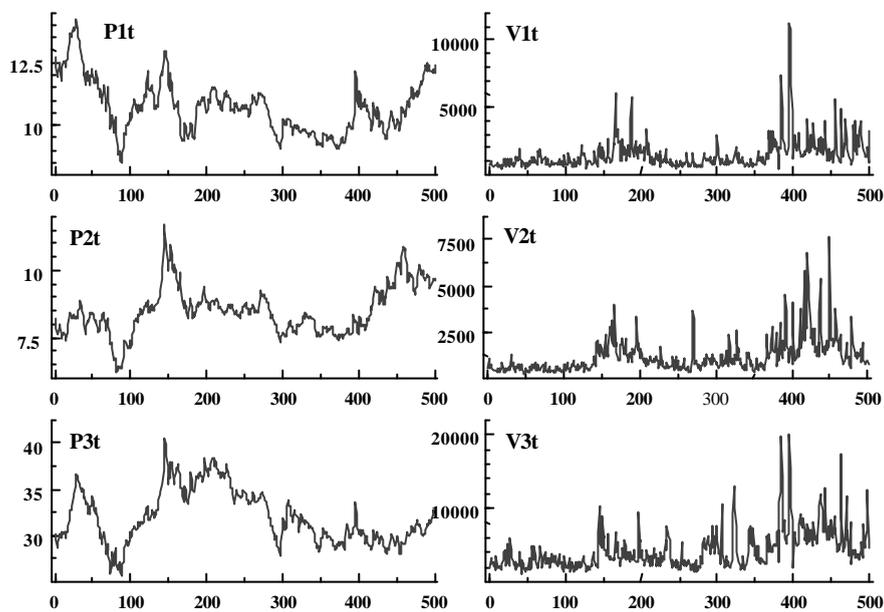


Figura 1. Andamento delle serie dei prezzi P_{it} e dei volumi V_{it}

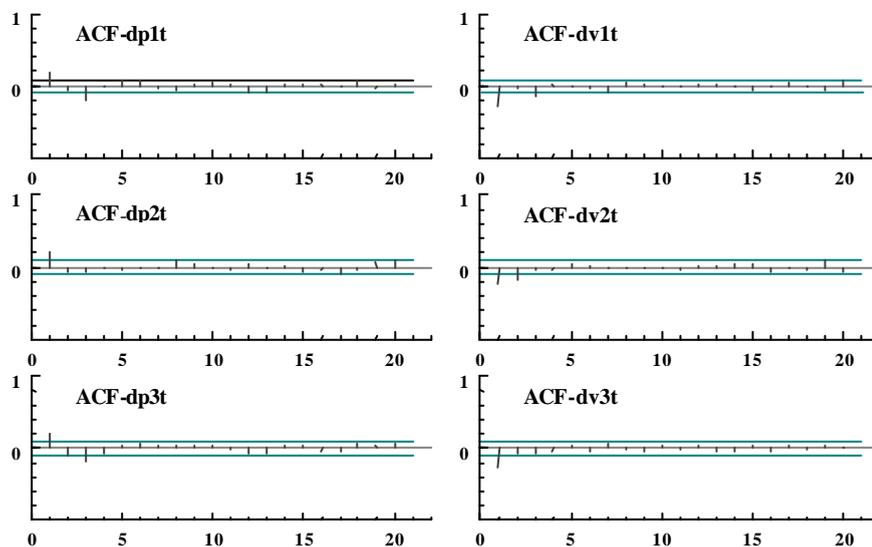


Figura 2. Funzioni di autocorrelazione delle serie dp_{it} e dv_{it} .

3. I modelli per le medie e le varianze condizionate

Le varianze condizionate delle serie finanziarie mostrano spesso un comportamento che può essere descritto da un modello dinamico della famiglia GARCH(r,s):

$$h_t = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}(B) a^2_t + \mathbf{g}(B) h_t \quad (3)$$

ove \mathbf{a}_0 è una costante positiva, $\mathbf{a}(B) = \mathbf{a}_1 B + \dots + \mathbf{a}_r B^r$ e $\mathbf{g}(B) = \mathbf{g}_1 B + \dots + \mathbf{g}_s B^s$ sono polinomi in B di grado r ed s analoghi a quelli visti precedentemente.

Il modello (3) può anche essere scritto nella forma ARMA(j,s), (Hamilton, 1994):

$$a^2_t = \mathbf{a}_0 + \mathbf{I}(B) a^2_t + \mathbf{g}(B) \mathbf{z}_t \quad (4)$$

ove l'operatore autoregressivo $\mathbf{I}(B) = (\mathbf{g}_1 + \mathbf{a}_1)B + (\mathbf{g}_2 + \mathbf{a}_2)B^2 + \dots + (\mathbf{g}_k + \mathbf{a}_k)B^k$ ha grado $j = \max(r,s)$ ed il nuovo disturbo casuale \mathbf{z}_t risulta essere la differenza: $\mathbf{z}_t = a^2_t - h_t$.

La stazionarietà in covarianza è assicurata dalla condizione che tutte le radici del polinomio $\mathbf{I}(B)=0$ siano fuori dal cerchio unitario, la non negatività delle varianze condizionate h_t dai vincoli: $\mathbf{a}_0 > 0$, $\mathbf{a}_i \geq 0$; $\mathbf{g}_i \geq 0$, (condizione solo sufficiente).

Nel caso particolarmente importante in cui l'ordine sia $r = s=1$, è stato dimostrato da Nelson- Cao (1992) che i vincoli $\mathbf{a}_0 > 0$, $\mathbf{a}_1 \geq 0$; $\mathbf{g}_1 \geq 0$ sono necessari e sufficienti per la non negatività di h_t , mentre la condizione di stazionarietà richiede l'ulteriore condizione: $\mathbf{a}_1 + \mathbf{g}_1 < 1$.

Il modello ARMA-GARCH comprende le due componenti descritte in (1) e (3), i cui parametri possono essere stimati simultaneamente con il metodo della pseudo massima verosimiglianza (PML) basata sull'ipotesi di distribuzione normale per $a_t | \mathbf{y}_{t-1}$. È noto che sotto condizioni sufficientemente generali lo stimatore PML gode della proprietà di consistenza anche se la distribuzione vera sottostante

non è la normale; inoltre, è asintoticamente distribuito in modo normale (White, 1981; Gouriou, 1997).

Per poter esprimere in modo sufficientemente compatto la funzione di pseudo verosimiglianza, conviene introdurre alcune notazioni. Indichiamo con i vettori $\mathbf{x}_t' = [z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}; a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_{t-q}]$ e $\mathbf{b}' = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_q]$ rispettivamente l'insieme delle variabili esplicative e l'insieme dei parametri che compaiono nella componente ARMA(p,q) del modello generale, mentre definiamo vettori analoghi $\mathbf{v}_t' = [1, a_{t-1}^2, \dots, a_{t-r}^2; h_{t-1}, h_{t-2}, \dots, h_{t-s}]$ e $\mathbf{t}' = [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_s]$ per la componente GARCH(r,s). Infine, includiamo tutti i parametri da stimare nel vettore $\mathbf{v}' = [\mathbf{b}', \mathbf{t}']$. A questo punto si può scrivere:

$$a_t = z_t - E[z_t | \mathbf{y}_{t-1}] = z_t - \mathbf{x}_t' \mathbf{b}; \text{ con } a_t | \mathbf{y}_{t-1} \sim N(0, h_t), \text{ e}$$

$$h_t = \mathbf{v}_t' \mathbf{t}$$

Data una realizzazione campionaria di estensione T , la funzione di pseudo log verosimiglianza per il modello ARMA-GARCH, a meno di una costante, risulta:

$$\begin{aligned} L_T(\mathbf{v}) &= T^{-1} \sum_{t=1}^T [-(1/2) \log(\mathbf{v}_t' \mathbf{t}) - (1/2)(z_t - \mathbf{x}_t' \mathbf{b})^2 (\mathbf{v}_t' \mathbf{t})^{-1}] = \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T l_t(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{ove } l_t(\mathbf{v}) = -(1/2) \log(h_t) - (1/2) a_t^2 h_t^{-1}$$

Per valutare la (5) in corrispondenza di un \mathbf{v} assegnato, è necessario risolvere iterativamente la (2) per a_t e la (3) per h_t . La stima cercata si ottiene massimizzando la (5) rispetto a \mathbf{v} (Bollerslev, 1986) e, a tal proposito, è disponibile software specifico (Martin, 1996).

I residui non standardizzati (residui ARMA), che per distinguerli da quelli di prima approssimazione, sono stati indicati con a_{pit} ed a_{vit} , costituiscono le componenti condizionatamente eteroschedastiche delle nostre serie, le variabili a_{pit}^2 gli indicatori di volatilità dei rendimenti.

Tabella 2. Stime PML dei parametri con relativi errori standard e test sui residui

| Titoli: | Alleanza | | Edison | | Generali | |
|--------------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|---------------------|
| | dp_{1t} | dv_{1t} | dp_{2t} | dv_{2t} | dp_{3t} | dv_{3t} |
| (p,q) | (3,0) | (0,3) | (2,0) | (1,1) | (3,0) | (2,1) |
| f_1 | .183 (.053) | | .212 (.047) | -.427 (.062) | .242 (.053) | .581 (.054) |
| f_2 | .056 (.053) | | -.091 (.047) | | -.129 (.048) | .092 (.049) |
| f_3 | -.109 (.050) | | | | -.074 (.048) | |
| q_1 | | -.460 (.041) | | .887 (.027) | | -.979 (.011) |
| q_2 | | -.166 (.046) | | | | |
| q_3 | | -.214 (.039) | | | | |
| (r,s) | (1,1) | (0,0) | (1,1) | (1,0) | (1,1) | (1,0) |
| a_0 | .075 (.031) | 1320.219 (71.674) | .085 (.053) | 1094.275 (76.229) | .115 (.062) | 926.421 (56.467) |
| a_1 | .066 (.017) | | .062 (.020) | .148 (.042) | .094 (.025) | .119 (.051) |
| g_1 | .919 (.017) | | .916 (.027) | | .866 (.036) | |
| $LB(12)$ | 6.440 | 6.330 | 5.564 | 4.049 | 3.886 | 7.322 |
| $TR^2(12)$ | 7.920 | 8.172 | 7.927 | 13.350 | 14.610 | 14.050 |
| $LB_a(12)$ | 23.260 | 14.060 | 21.867 | 13.384 | 15.458 | 11.899 |
| $TR_a^2(12)$ | 32.462 | 8.137 | 41.635 | 28.239 | 52.794 | 21.379 |

La Tabella 2 riporta per tutte le serie i valori stimati significativi dei parametri con i rispettivi errori standard per i modelli ARMA(p,q)-GARCH(r,s), le statistiche LB_a e TR^2_a sui residui ARMA a_{pit} e a_{vit} , le analoghe LB e TR^2 sui residui standardizzati finali.

Confrontando i valori di tali statistiche con quelli del test χ^2 con u gradi di libertà ed al livello di significatività $\alpha=.05$, si perviene alla conclusione seguente: tutte le serie delle variazioni relative dei prezzi e tutte le serie delle variazioni relative dei volumi, ad eccezione di *Alleanza*, presentano una struttura ARMA-GARCH. Ciò significa che le varianze condizionate delle innovazioni dei processi ARMA che descrivono le evoluzioni delle medie condizionate, a loro volta seguono un processo GARCH.

4. *Variazioni relative dei volumi e volatilità dei rendimenti*

Con gli elementi acquisiti siamo in grado di accertare l'esistenza di un nesso tra le misure a^2_{pit} della volatilità dei rendimenti, e le variazioni relative dei volumi dv_{it} . Le funzioni di correlazione incrociata tra le coppie di serie (a^2_{pit}, dv_{it}) (Figura 3) segnalano in modo inequivocabile la dipendenza lineare di dv_{it} dai valori attuali e passati di a^2_{pit} . Per descrivere analiticamente tale relazione, abbiamo considerato modelli di regressione dinamica (Pankratz, 1991) in cui dv_{it} può dipendere linearmente da suoi valori precedenti $dv_{it-1}, dv_{it-2}, \dots$, dalle variabili esplicative $a^2_{pit}, a^2_{pit-1}, \dots$ nonché da una combinazione lineare di rumori bianchi \mathbf{x}_{it} , eventualmente condizionatamente eteroschedastici.

La famiglia di modelli proposta, che per necessità di sintesi denotiamo con RD(k,m,l)-GARCH(r,s), essendo $k, m, l; r, s$, gli ordini dei polinomi in B coinvolti, si può esprimere tramite due equazioni. La prima descrive la dinamica della media condizionata, la seconda quella della varianza condizionata h_t :

$$\mathbf{d}(B)dv_t = \mathbf{v}(B)a^2_{pt} + \mathbf{J}(B) \mathbf{x}_t \quad (6)$$

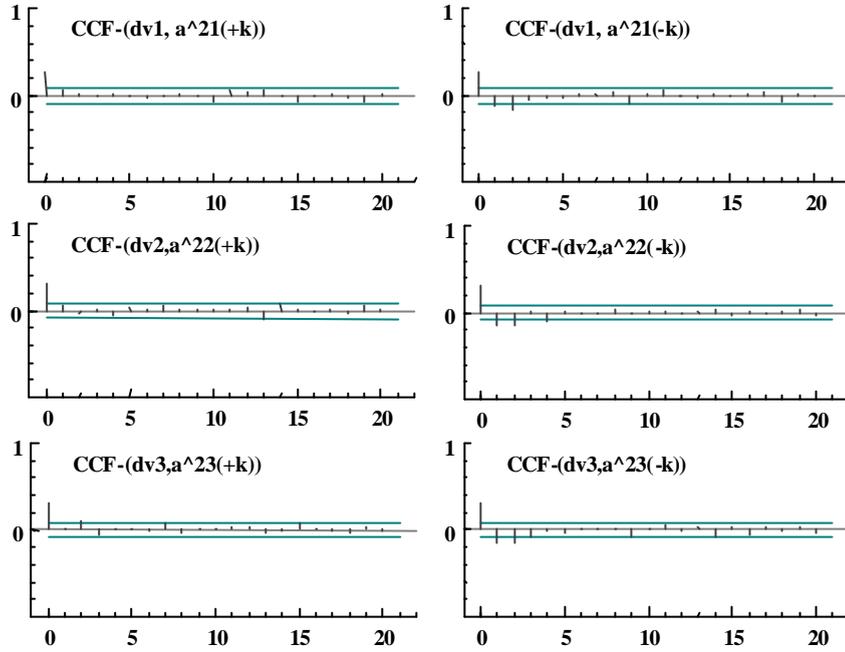


Figura 3. Funzioni di cross-correlazione: $Corr(dv_{it}, a^2_{it+k})$, $Corr(dv_{it}, a^2_{it-k})$.

$$h_t = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}(B) \mathbf{x}_t^2 + \mathbf{g}(B) h_t \quad (7)$$

I polinomi: $\mathbf{d}(B) = (1 - \mathbf{d}_1 B - \dots - \mathbf{d}_k B^k)$; $\mathbf{v}(B) = (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 B + \dots + \mathbf{v}_m B^m)$ e $\mathbf{J}(B) = (1 - \mathbf{J}_1 B - \dots - \mathbf{J}_l B^l)$, di grado rispettivamente k , m ed l , non hanno fattori comuni, inoltre le radici di $\mathbf{d}(B)$ e $\mathbf{J}(B)$ sono esterne al cerchio di raggio unitario. \mathbf{x}_t è il disturbo casuale a media nulla, serialmente incorrelato, che può essere condizionatamente eteroschedastico e, in tal caso, il comportamento della sua varianza condizionale è rappresentabile con il modello GARCH(r,s) (7), per il quale valgono le considerazioni del paragrafo 3.

A motivo della presenza di eteroschedasticità condizionale, le operazioni di identificazione sono risultate complesse. Oltre ad applicare la procedura in tre fasi richiamata nell'introduzione,

abbiamo dovuto sperimentare una molteplicità di ordini dell'ipotetico modello per poi scegliere con i criteri AIC e BIC. La stima finale dei parametri anche in questo caso è stata fatta massimizzando la funzione di pseudo verosimiglianza sotto ipotesi di normalità.

Tabella 3. Stime PML dei parametri con relativi errori standard e test sui residui.

| <i>Titoli</i> | <i>Alleanza</i> | <i>Edison</i> | <i>Generali</i> |
|------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| <i>Parametri</i> | | | |
| (k,m,l) | (1,2,1) | (1,2,1) | (1,1,1) |
| \mathbf{d}_1 | .354 (.044) | .358 (.063) | .560 (.041) |
| \mathbf{v}_0 | 1.752 (.128) | 2.276 (.158) | 2.896 (.186) |
| \mathbf{v}_1 | -1.231 (.199) | -1.788 (.349) | -2.887 (.192) |
| \mathbf{v}_2 | -.527 (.166) | -.487 (.321) | |
| \mathbf{J}_1 | -.886 (.026) | -.860 (.031) | -.951 (.015) |
| (r,s) | (0,0) | (1,0) | (1,0) |
| \mathbf{a}_0 | 1105.834 (62.658) | 904.676 (60.532) | 716.283 (55.815) |
| \mathbf{a}_1 | | .139 (.045) | .157 (.053) |
| $LB(12)$ | 15.88 | 4.886 | 13.560 |
| $TR^2(12)$ | 12.48 | 12.540 | 5.597 |

Per ogni titolo considerato, presentiamo nella Tabella 3 le stime finali dei parametri e le statistiche LB e TR^2 sui residui standardizzati. Tutti i test dimostrano che i modelli accostati rappresentano molto bene i comportamenti considerati.

Nel nostro schema, dunque, la volatilità dei rendimenti influenza direttamente la dinamica delle medie condizionate delle variazioni dei

volumi. La relazione proposta può apparire una forzatura in quanto all'indicatore di volatilità si fa assumere il ruolo di variabile esogena. In realtà il sistema costruito è causale e la sua utilità può essere apprezzata in ambito previsionale in quanto la prevedibilità di a^2_{pit} , garantita dal sottostante modello GARCH, comporta quella di dv_{it} .

Questo risultato evidenzia un aspetto trascurato nella letteratura, ove la preoccupazione prevalente è quella di prevedere la volatilità in quanto fenomeno al quale l'operatore di mercato rivolge la massima attenzione. La possibilità di prevedere le variazioni dei volumi, tuttavia, non è priva di valore; infatti, i volumi scambiati e le loro variazioni sono importanti indicatori della situazione economica del settore di riferimento.

5. Conclusioni

Lo scopo del lavoro era quello di verificare empiricamente e rappresentare con opportuni modelli dinamici le caratteristiche e le relazioni concernenti i prezzi ed i volumi, o loro necessarie trasformazioni. La natura delle serie considerate ci ha imposto di considerare aspetti diversi e per questo siamo pervenuti ad una molteplicità di risultati che ora possiamo sintetizzare. Con riferimento alle singole serie delle variazioni relative dei prezzi e dei volumi dp_{it} e dv_{it} abbiamo identificato ed accostato modelli ARMA-GARCH per rappresentare le dinamiche delle medie e delle varianze condizionate. In tal modo abbiamo potuto estrarre i residui ARMA condizionatamente eteroschedastici a_{pit} ed a_{vit} e proporre a^2_{pit} come indicatore della volatilità dei rendimenti. La ricerca di relazioni tra variazioni dei volumi e volatilità ci ha indotto a quantificare il legame tra le variabili a^2_{pit} e dv_{it} , chiaramente segnalato dalla funzione di correlazione incrociata. Un modello di regressione dinamica con disturbo condizionatamente eteroschedastico appare adeguato allo scopo. La logica sottostante è che la volatilità dei rendimenti induca effetti consistenti sulle variazioni dei volumi condizionandone il comportamento.

Pur nei limiti dell'esperimento condotto, il risultato fondamentale di questo lavoro è quello di aver evidenziato e rappresentato con modelli appropriati relazioni dinamiche tra variazioni dei volumi e volatilità dei rendimenti che non appaiono adeguatamente considerate in letteratura.

Riferimenti bibliografici

Andersen T. G. (1996) Return Volatility and Trading Volume in Financial Markets. An Information Flow Interpretation of Stochastic Volatility, *Journal of Finance*, 51, pp. 169-204.

Bollerslev T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327

Box G. E. P. Jenkins G. M., (1976) *Time Series Analysis Forecasting and Control*. Holden Day, S. Francisco.

Brooks C. (1998) Predicting Stock Index Volatility: Can Market Volume Help?, *Journal of Forecasting*, 17, pp. 59-80.

Campbell J.Y. Lo W. A., MacKinlay A. C. (1997) *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton.

Clark P. K. (1973) A subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices, *Econometrica*, 41, pp. 135-155.

Gouriéroux C. (1997) *ARCH Models and Financial Applications*, Springer, Berlin.

Hamilton J. D. (1994) *Time series Analysis*, Princeton University Press, Princeton.

Hsu C. (1998) *Volume and The Nonlinear Dynamics of Stock Returns*, Springer Verlag, Berlin.

Martin R. D., Gao H. Y., Zhan Y., Ding Z. (1996) *S+GARCH User's Manual*, MathSoft, Washington.

Nelson D.B., Cao C. Q. (1992) Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, pp. 229-235

- Pankratz A. (1991) *Forecasting with Dynamic Regression Models*. John Wiley, New York.
- Tauchen G. E., Pitts M. K. (1983) The Price Variability-Volume Relationship on Speculative Markets, *Econometrica*, 51, pp. 485-505.
- White H. (1981) Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models, *Econometrica*, 50, pp. 1-25