Quaderni di Statistica
Vol. 4, 2002

Stime mediante Inferenza Indiretta per modelli ARFIMA

Francesca Di Iorio
Dipartimento di Scienze Statistiche
Università di Napoli Federico II
E-mail: fdiiorio@unina.it

Summary: In this paper we investigate the large sample behaviour of Indirect Inference estimator for ARFIMA$(0, d, 0)$ models, by a set of Monte Carlo expriments. Special attention is given to comparing the performance of the indirect estimator achieved applying an overidentified auxiliary model with the one achieved applying a just-identified auxilary model. Moreover an indirect estimator of the ARFIMA variance is presented. The approximate Whittle Maximum Likelihood is used as benchmark estimator.

Key words: ARFIMA, Indirect Inference, Efficiency, Overidentification.

1. Introduzione

I modelli ARMA ad integrazione frazionaria (ARFIMA), proposti da Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981), hanno riscosso un grande interesse negli ultimi anni; Baillie (1996) cita ben 138 lavori riguardanti i modelli ARFIMA, di cui 20 si concentrano sugli aspetti probabilistici e 82 su problemi statistici ed econometrici.

Tra gli argomenti di maggiore interesse vi è senza dubbio la ricerca di procedure di stima efficienti e computazionalmente praticabili (Brockwell e Davis 1991, Beran 1995). La stima di Massima Verosimiglianza, risulta infatti molto onerosa a causa dell'inversione della matrice di covarianza di ordine T (dove T indica la lunghezza della serie storica) presente nell'espressione. Per questo motivo alcuni dei metodi di stima più utilizzati sono stati sviluppati nel dominio delle frequenze: si veda tra i lavori più noti l'approssimazione della funzione di Verosimiglianza di Whittle, lo stimatore, denominato GPH, ottenuto tramite regressione spettrale proposto da Geweke e Porter-Hudak (1983) oppure il contributo di Janaceck (1982) e di Fox e Taqqu (1986).

Lo stimatore GPH, pur essendo computazionalmente non oneroso, è inefficiente e fornisce stime per il solo parametro di integrazione d. Per una rassegna sullo stimatore GPH si veda ad esempio Agiakloglou et al. (1992).

Il problema della massimizzazione della Verosimiglianza è stato essenzialmente risolto da Sowell (1992) mediante la proposta di un metodo per il calcolo della funzione di autocorrelazione del processo ARFIMA e quindi della matrice di covarianza. Lo stimatore proposto da Sowell, indicato anche come Massima Verosimiglianza Esatta, pur essendo asintoticamente efficiente resta computazionalmente oneroso. Forse per questo motivo non sono stati presentati risultati per serie di numerosità elevata. Un'analisi degli aspetti computazionali legati a questa procedure di stima è stata condotta da Doornik e Ooms (2001).

Il problema della stima è stato affrontato anche mediante approcci bayesiani (si veda, per esempio, Koop et al. 1997) oppure derivando stimatori detti di Minimum Distance come, ad esempio, quelli basati sulla distanza tra la funzione di autocorrelazione campionaria e quella della popolazione (Tieslau et al. 1996).

Alla luce di quanto brevemente illustrato, la stima via simulazione ed in particolare il metodo dell'Inferenza Indiretta (Gouriéroux et al. 1993, Gallant and Tauchen 1996) appare attraente per la possibilità di pervenire a stime evitando l'inversione della matrice di covarianza di ordine T nella Verosimiglianza: si veda Corduas (1997), Martin e Wilkins (1999)[1]. In tali lavori viene mostrato come gli stimatori di Inferenza Indiretta abbiano un comportamento molto simile a quello degli stimatori "classici" come quello di Massima Verosimiglianza secondo l'approssimazione di Whit-

[1] Galbraith e Zinde-Walsh (2001) presentano risultati teorici sulla consistenza e sulla distribuzione asintotica degli stimatori di inferenza indiretta.

tle. Tali risultati sono stati ottenuti attraverso esperimenti Monte Carlo su serie di 100, 200 e 500 dati.

Scopo del presente lavoro è verificare il comportamento per serie di lunghezza elevata delle stime di Inferenza Indiretta. In particolare si vuole verificare se la sovraidentificazione del modello ausiliario apporti miglioramenti sostanziali in termini di efficienza e se, e in che misura, tale contributo vari al crescere del numero di osservazioni. Il lavoro è organizzato come segue: nel secondo paragrafo vengono brevemente richiamati i modelli ARFIMA, nel terzo paragrafo è illustrata l'essenza del metodo di Inferenza Indiretta. L'esperimento Monte Carlo e le conclusioni sono illustrate nei paragrafi quattro e cinque rispettivamente.

2. Il modello ARFIMA

Un processo ARFIMA(p, d, q) gaussiano è indicato come:

$$\phi(B)(1-B)^d Y_t = \theta(B)\epsilon_t \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \tag{1}$$

dove d è il parametro di integrazione frazionaria, $\phi(B) = 1 - \phi_1 B ... - \phi_p B^p$ e $\theta(B) = 1 + \theta_1 B .... + \theta_q B^q$ sono gli usuali polinomi nell'operatore ritardo B di ordine p e q, rispettivamente, con radici esterne al cerchio unitario e privi di fattori comuni. Il processo risulta stazionario e invertibile per $-0.5 < d < 0.5$; inoltre, per $0 < d < 0.5$ esso è caratterizzato da effetti di lunga memoria.

La funzione di log-Verosimiglianza é data da

$$logL(d, \phi, \theta, \sigma) = -\frac{T}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2} log \mid \Sigma \mid - \frac{1}{2} \mathbf{y}' \Sigma^{-1} \mathbf{y}$$

dove $\mathbf{y} = (y_1, ...y_T)'$ è il vettore delle osservazioni e Σ è la matrice di covarianza di ordine T. L'ipotesi di stazionarietà implica che la matrice di covarianza assuma la forma $\Sigma = [\gamma(i-j)]$ per $i, j = 1, 2, ...T$ dove $\gamma(k)$ indica l'autocovarianza a ritardo k. Sowell (1992), estendendo i risultati di Hosking (1981) ed assumendo l'unicitá delle radici del polinomio AR, perviene ad un algoritmo di calcolo della funzione di autocorrelazione basato sulla valutazione ricursiva di funzioni ipergeometriche. Per una discussione sulle implicazioni computazionali di tali algoritmo si veda Doornik e Ooms (2001).

L'approssimazione di Whittle della funzione di log-Verosimiglianza (Beran 1995) può essere indicata con

$$logL(\mathbf{y}, \alpha) \propto -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{T} logf(\omega_j, \alpha) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{T} \frac{I_n(\omega_j)}{f(\omega_j, \alpha)} \tag{2}$$

dove $\alpha = (d, \phi, \theta, \sigma^2)'$ è il vettore dei parametri, $I_n(\omega_j)$ indica il periodogramma:

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{2\pi T} \mid \sum_{t=1}^{T} y_t exp(-i\omega_j t) \mid^2$$

e $f(\omega_j)$ indica la funzione di densitá spettrale (non normalizzata) di un processo ARFIMA espressa da:

$$f(\omega_j) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \mid 1 - exp(-i\omega_j) \mid^{-2d} \frac{\mid \theta(e^{-i\omega_j}) \mid^2}{\mid \phi(e^{-i\omega_j}) \mid^2}$$

valutata alle frequenze di Fourier $\omega_j = \frac{2\pi j}{T}$ per $j = 1, 2, ..., T$. Sempre sotto l'ipotesi di stazionarietà e invertibilità è possibile dimostrare (Hosking, 1981) che il processo $Y_t \sim ARFIMA(p, d, q)$ ammette la rappresentazione AR infinita

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k Y_{t-k} = \epsilon_t \tag{3}$$

dove $\pi_0 = 1$ e $\pi_k = \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)}$; per tali coefficienti vale per $k \to \infty$ la seguente approssimazione

$$\pi_k \sim \frac{1}{\Gamma(-d)} k^{-d-1}.$$

Inoltre, per l'ipotesi di stazionarietà il processo ammette anche la rappresentazione MA infinita:

$$Y_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \epsilon_{t-k} \tag{4}$$

dove $\psi_0 = 1$ e $\psi_k = \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d)}$; si ha anche che per $k \to \infty$ vale l'approssimazione

$$\psi_k \sim \frac{1}{\Gamma(d)} k^{d-1}.$$

Per ulteriori approfondimenti sui modelli ARFIMA si vedano Brockwell e Davis (1991), Beran (1995), Baillie (1996).

3. L'inferenza Indiretta

Lo stimatore di Inferenza Indiretta, proposto da Gouriéroux et al. (1993) e Gallant e Tauchen (1996), può essere sommariamente descritto come segue. Sia $y_t = f(y_{t-1}, x_t, \epsilon_t, \alpha)$, dove x_t sono variabili esogene, $\alpha \in A$ il vettore dei parametri, ϵ_t variabili casuali errori a distribuzione nota, y_t variabili endogene e y_{t-1} eventuali endogene ritardate. Tale espressione rappresenta un modello di interesse la cui stima è difficoltosa o computazionalmente impraticabile, che risulta, tuttavia, simulabile, ovvero è possibile ottenere valori di y_t condizionatamente a valori di x_t, ϵ_t e α. Sia inoltre $y_t = g(y_{t-1}, x_t, \beta, \eta)$, dove $\beta \in B$ è un vettore di parametri e η termini di errore, un modello (detto *ausiliario*) i cui parametri siano facilmente stimabili. La stima del modello *ausiliario* su dati osservati y_t, che si suppone generati dal modello di interesse, conduce a stime $\hat{\beta}$ inconsistenti, come pure risultano inconsistenti le stime di β ottenute stimando il modello ausiliario su valori simulati $\tilde{y}_t(\alpha)$ dal modello di interesse condizionatamente a x_t, ϵ_t e α. Indicando con $\tilde{\beta}(\alpha)$ tali stime, se è possibile affermare che $\hat{\beta}$ e $\tilde{\beta}(\alpha)$ non sono troppo distanti tra loro in base ad una metrica prefissata, allora i valori di α che hanno prodotto i valori simulati $\tilde{y}_t(\alpha)$ sono delle "buone" stime dei parametri di interesse.

Lo stimatore di Inferenza Indiretta per α proposto da Gouriéroux et al. (1993) assume l'espressione:

$$\hat{\alpha} = argmin_{\alpha}[\hat{\beta} - \tilde{\beta}(\alpha)]'{\Omega_1}^{-1}[\hat{\beta} - \tilde{\beta}(\alpha)] \tag{5}$$

dove Ω_1 è una matrice definita positiva.

Gallant e Tauchen (1996) hanno proposto una versione modificata della (**??**), nota anche come Metodo Efficiente dei Momenti (EMM nel seguito), espressa da:

$$\hat{\alpha} = argmin_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \beta'} \left[\tilde{y}_t(\alpha); \hat{\beta}\right] \Omega_2{}^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} \left[\tilde{y}_t(\alpha); \hat{\beta}\right] \quad (6)$$

dove Ω_2 è una matrice definita positiva e $\frac{\partial L}{\partial \beta}(\tilde{y}_t(\alpha); \hat{\beta})$ è la funzione score del modello ausiliario calcolata sui valori simulati $\tilde{y}_t(\theta)$ in $\hat{\beta}$. Gli stimatori (**??**) e (**??**) associati con la scelta ottimale per le matrici Ω_1 e Ω_2 hanno la stessa efficienza asintotica.

La varianza dello stimatore può essere ridotta utilizzando la media di h stime del modello ausiliario su realizzazioni simulate indipendenti generate dal modello di interesse: $\tilde{\beta} = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{h} \tilde{\beta}_j$.

Gouriéroux et al. (1993) hanno dimostrato che, in assenza di variabili esogene, la riduzione della varianza può essere ottenuta stimando il modello ausiliario su una sola serie di dati simulati di lunghezza $h * T$. Un analogo risultato si trova per lo stimatore proposto da Gallant e Tauchen (1996). Inoltre, in generale, non è necessario che il numero dei parametri del modello ausiliario sia pari a quello dei parametri del modello di interesse (caso di esatta identificazione). Nel caso in cui i parametri β siano in numero superiore ai parametri α si parlerà di sovraidentificazione nella procedura di stima.

Per una discussione sugli aspetti computazionali del calcolo degli stimatori (**??**) e (**??**) si vedano ad esempio Pastorello et al. (1994), Bianchi e Cleur (1996), Calzolari et al. (1998, 2001a, 2001b).

4. Lo studio Monte Carlo

Il comportamento degli stimatori di Inferenza Indiretta per modelli ARFIMA è stato investigato da Corduas (1997) e da Martin e Wilkins (1999). Tali autori sviluppano l'esperimento Monte Carlo per serie di lunghezza T=200 (Corduas) e T=100 e 500 (Martin e Wilkins) e utilizzano come modello ausiliario rispettivamente un modello AR(p) il cui ordine è determinato mediante il criterio di Akaike, e modelli AR(1) e AR(4). Lo stimatore di Inferenza Indiretta viene confrontato con lo stimatore GPH e con la Massima Verosimiglianza, definita in accordo con Whittle e secondo la procedura di Sowell, richiamate in precedenza. In entrambi i lavori si verifica che lo stimatore di Inferenza Indiretta per il parametro d ha un comportamento paragonabile a quello degli stimatori di Massima Verosimiglianza. Tuttavia, dai risultati presentati da Martin e Wilkins, emerge un comportamento a volte contraddittorio dell'Inferenza Indiretta per T=100 all'aumentare dell'ordine di sovraidentificazione del modello ausiliario[2]. In questi lavori, per altro, non vengono presentati risultati sulla stima della varianza σ^2 del modello ARFIMA.

Gli scopi dell'esperimento Monte Carlo presentato in questo lavoro sono: verificare il comportamento asintotico dell'Inferenza Indiretta anche in relazione alla stima della varianza; controllare se la sovraidentificazione apporti miglioramenti sostanziali in termini di efficienza; valutare se e in che misura tale contributo vari al crescere del numero di osservazioni.

L'esperimento Monte Carlo è stato condotto su modello ARFIMA $(0, d, 0)$ con $d > 0$. Come modelli ausiliari sono stati utilizzati i modelli AR(1) e AR(4), seguendo Martin e Wilkins, e il modello AR(8) come ulteriore verifica sulla sovraidentificazione. I valori scelti per i parametri di interesse sono stati $d = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e $\sigma^2 = 0.8$; sono state considerate lunghezze campionarie pari a T=100, 1000, 10000. Per il caso di esatta identificazione è stato utilizzato lo stimatore (**??**), mentre per il caso di sovraidentificazione è stato preferito lo stimatore (**??**) che presenta in questo caso alcuni vantaggi computazionali. Le stime sono state condotte utilizzando serie simulate di lunghezza pari alla serie dei dati storici $(h = 1)$ o dieci volte più lunghe $(h = 10)$. Il comportamento dello stimatore di Inferenza Indiretta è stato confrontato con quello di Massima Verosimiglianza secondo Whittle.

[2]Gli autori presentano risultati per T=500 per il solo modello ausiliario AR(1)

4.1 Scelta del metodo di simulazione del modello di interesse

Da quanto descritto precedentemente, appare evidente che la scelta del metodo di simulazione del modello di interesse assume rilevanza computazionale nel momento in cui si intende procedere a verifiche asintotiche sullo stimatore di Inferenza Indiretta.

Nel caso dei modelli ARFIMA sono stati proposti in letteratura numerose strategie per la simulazione dei dati. Un'ampia rassegna è stata recentemente proposta da Bardet et al. (2002).

Martin e Wilkins (1999) dedicano molto attenzione al problema e verificano il comportamento dello stimatore di Inferenza Indiretta anche sulla base della strategia di simulazione dei dati utilizzata. Essi, in particolare, impiegano l'algoritmo di Cholesky e la rappresentazione AR infinita (**??**) troncata a l=1000 ritardi, verificando che entrambe le strategie portano a risultati confrontabili. La strategia di Cholesky presenta una complessità computazionale di ordine $O(T^3)$, il che la rende impraticabile per una verifica asintotica. D'altra parte, la rappresentazione AR infinita (**??**) presenta il problema della scelta del numero di ritardi e della determinazione dei valori iniziali di numerosità pari al troncamento scelto, nonché degli effetti che ciò determina sui risultati ottenuti. Martin e Wilkins, come detto, utilizzano $l = 1000$ ritardi, ma affermano di aver ottenuto risultati soddisfacenti anche con $l = 500$ o $l = 100$ ritardi.

Una strategia alternativa per la generazione di dati da un modello ARFIMA è basata sulla rappresentazione MA infinita (**??**). Tale strategia presenta il vantaggio di non richiedere la generazione di valori iniziali per la serie, ma solo per le variabili casuali errori e di essere computazionalmente agevole. Per quanto concerne la scelta del numero di ritardi, Breand et al. (2002) verificano il comportamento della strategia per rappresentazioni troncate a l=50, 100 e 1000 ritardi, trovando buoni risultati rispetto al problema della stima di d mediante la Massima Verosimiglianza secondo Whittle.

Si è quindi ritenuto opportuno adottare la strategia MA per la simulazione dei dati del modello ausiliario, ponendo a confronto i risultati ottenuti utilizzando ritardi pari a $l = 30$ e $l = 500$. Per una ulteriore verifica per T=100, gli stimatori di Inferenza Indiretta sono stati ottenuti anche mediante l'uso dell'algoritmo di Durbin e Levinson[3] (Brockwell e Davis, 1991).

Infine si osservi che l'uso della formulazione MA troncata non è esente da problemi: nell'espressione (**??**) si nota infatti che a denominatore appare espressione $\Gamma(d)$ che per valori di d prossimi allo zero procura instabilità nella generazione delle serie e quindi nella procedura di calcolo dell'Inferenza Indiretta.

4.2 I risultati dell'esperimento Monte Carlo

Le tabelle seguenti, dove vengono riportate le medie e, tra parentesi quadre, gli errori standard Monte Carlo, evidenziano i principali risultati ottenuti dall'esperimento di simulazione[4].

Come si osserva dalla Tabella 1, sia per la Massima Verosimiglianza secondo Whittle, sia per l'Inferenza Indiretta, le tre strategie di simulazione portano a risultati sostanzialmente equivalenti in termini di media ed errore standard per entrambi i parametri di interesse d e σ^2. Quindi, la strategia MA con 30 ritardi può essere utilmente impiegata nell'esperimento Monte Carlo.
Si può inoltre osservare che le stime mediante l'Inferenza Indiretta, nel caso di esatta identificazione per entrambi i parametri di interesse, sono simili a quelle ottenute mediante la Massima Verosimiglianza.
Per quanto riguarda le stime di Inferenza Indiretta, nel caso di sovraidentificazione, si osserva che per il modello AR(4) le stime dei parametri presentano una media Monte Carlo vicina a quella del caso di esatta identificazione. Si nota, tuttavia, un comportamento contraddittorio per quando riguarda gli errori standard Monte Carlo. Impiegando il modello AR(8) le stime di d continuano ad essere soddisfacenti mentre le stime di σ^2 peggiorano nettamente, sia in termini di media che di errore standard. Quest'ultimo risultato appare di un certo interesse poichè in letteratura

[3]Tale algoritmo presenta una complessità dell'ordine di $O(T^2)$, il che lo rende preferibile all'algoritmo di Cholesky, ma sempre inadatto per una verifica asintotica.

[4]Gli algoritmi di calcolo per l'Inferenza Indiretta sono stati sviluppati in Fortran 77, le stime di Massima Verosimiglianza sono state ottenute mediante il pacchetto CML di Gauss.

non sono stati presentati risultati sulla stima di σ^2.

Tabella 1. Modello ARFIMA(0,d,0)

	d	σ^2	d	σ^2	d	σ^2	d	σ^2
Gen.	0.1	0.8	0.2	0.8	0.3	0.8	0.4	0.8
				Whittle				
DL	0.0679	0.7817	0.1711	0.7900	0.2696	0.7979	0.3568	0.8064
	[.0977]	[.1144]	[.0972]	[.1161]	[.0941]	[.1186]	[.0853]	[.1222]
MA(30)	0.0761	0.7963	0.1904	0.7985	0.3057	0.8066	0.3906	0.8140
	[.0934]	[.1127]	[.0935]	[.1135]	[.0907]	[.1151]	[.0736]	[.1175]
MA(500)	0.0731	0.7844	0.1841	0.7875	0.2956	0.7933	0.3832	0.8032
	[.0978]	[.1121]	[.0984]	[.1129]	[.0963]	[.1147]	[.0793]	[.1180]
				Ind.Inf. - aux: AR(1), h=10				
DL	0.0965	0.7912	0.1953	0.7915	0.2922	0.7906	0.3807	0.7869
	[.0918]	[.1154]	[.0809]	[.1182]	[.0757]	[0.1216]	[.0693]	[.1256]
MA(30)	0.0908	0.7915	0.1923	0.7922	0.2921	0.7926	0.3778	0.7904
	[.0904]	[.1172]	[.0794]	[.1185]	[.0753]	[.1201]	[.0692]	[.1236]
Ma(500)	0.0906	0.7920	0.1936	0.7932	0.2920	0.7923	0.3730	0.7859
	[.0971]	[.1198]	[.0828]	[.1215]	[.0777]	[.1234]	[.0692]	[.1236]
				EMM - aux: AR(4), h=10				
MA(30)	0.1044	0.7016	0.1929	0.7037	0.2841	0.7013	0.3722	0.7012
	[.0719]	[.1235]	[.0809]	[.1204]	[.0871]	[.1233]	[.0887]	[.1232]
				EMM - aux: AR(8), h=10				
MA(30)	0.1071	0.6058	0.1947	0.6060	0.2853	0.6052	0.3734	0.6074
	[.0809]	[.1318]	[.0936]	[.1292]	[.0990]	[.1329]	[.0973]	[.1320]
T= 100								Replicazioni= 1000

E' opportuno porre in evidenza che, mentre nel caso di esatta identificazione la procedura di calcolo ha sempre raggiunto la convergenza in maniera ottimale, questo non si è sempre verificato nel caso sovraidentificazione. Infatti, nella (**??**) la funzione score calcolata su dati simulati, condizionatamente ai valori veri dei parametri α, deve essere pari a zero. All'aumentare dell'ordine di sovraidentificazione la funzione obiettivo sembra, invece, assumere una forma piatta nei dintorni del valore vero dei parametri, o comunque una forma tale per cui la procedura tende a produrre stime migliori per d a scapito di σ^2. Questa circostanza è confermata dal fatto che in letteratura la sovraidentificazione è sempre stata ritenuta efficace per la stima di d. Per verificare se i risultati descritti precedentemente dipendano dalla lunghezza della serie è stato condotto un analogo esercizio Monte Carlo per T=1000, descritto nella Tabella 2.

Tabella 2. Modello ARFIMA(0,d,0)

	d	σ^2	d	σ^2	d	σ^2	d	σ^2
Gen.	0.1	0.8	0.2	0.8	0.3	0.8	0.4	0.8
Whittle								
MA(30)	0.1022	0.7980	0.2120	0.7999	0.3057	0.8063	0.4366	0.8078
	[.0255]	[.0351]	[.0259]	[.0352]	[.0264]	[.0355]	[.0264]	[.0358]
Ind.Inf. - aux: AR(1), h=10								
MA(30)	0.1011	0.7979	0.2010	0.7980	0.3009	0.7980	0.4006	0.7978
	[.0262]	[.0383]	[.0237]	[.0394]	[.0242]	[.0399]	[.0262]	[.0403]
Ind.Inf. - aux: AR(4), h=10								
MA(30)	0.0989	0.7991	0.2014	0.7879	0.3004	0.7881	0.3992	0.7874
	[.0272]	[.0370]	[.0242]	[.0382]	[.0251]	[.0374]	[.0258]	[.0382]
Ind.Inf. - aux: AR(8), h=10								
MA(30)	0.1019	0.7752	0.2011	0.7748	0.2998	0.7749	0.3990	0.7749
	[.0260]	[.0387]	[.0252]	[.0382]	[.0259]	[.0390]	[.0266]	[.0391]
T= 1000								Replicazioni= 1000

Dai risultati riportati, gli errori standard presentano la riduzione attesa all'aumentare della lunghezza della serie rispetto agli analoghi esercizi della Tabella 1. Per quanto riguarda la sovraidentificazione, i confronti tra gli errori standard sembrano evidenziare che il modello AR(4) fornisce risultati migliori rispetto a quelli del modello AR(8) per valori di $d \geq 0.2$ e per σ^2 associato a tutti i valori di d.

Anche in questo caso bisogna osservare che la funzione obiettivo, all'aumentare dell'ordine di sovraidentificazione, ha assunto una forma tale per cui la procedura di calcolo per lo stimatore (**??**) ha incontrato alcune difficoltà nel raggiungimento della convergenza. Pertanto si è ritenuto opportuno procedere ad una ulteriore verifica per T=10000, i cui risultati sono riportati nella Tabella 3.

Si osserva che gli stimatori di Inferenza Indiretta presentano comportamenti equivalenti per i tre modelli ausiliari utilizzati e vengono sostanzialmente risolte le contraddizioni sull'efficienza al crescere della sovraidentificazione. Occorre notare che gli errori standard Inferenza Indiretta e di EMM si mantengono distanti da quelli della stima di Massima Verosimiglianza, evidenziando la possibilità di un utile impiego di tecniche di riduzione della varianza.

Tabella 3. Modello Arfima(0,d,0)

	d	σ^2	d	σ^2	d	σ^2	d	σ^2
Gen.	0.1	0.8	0.2	0.8	0.3	0.8	0.4	0.8
Whittle								
MA(30)	0.0999	0.7989	0.2094	0.8001	0.3217	0.8031	0.4341	0.8082
	[.0081]	[.0114]	[.0077]	[.0113]	[.0079]	[.0114]	[.0086]	[.0117]
Ind.Inf. - aux: AR(1), H=1								
MA(30)	0.0997	0.7994	0.1998	0.7995	0.3000	0.7995	0.4000	0.7995
	[.0118]	[.0160]	[.0106]	[.0163]	[.0106]	[.0166]	[.0133]	[.0167]
Ind.Inf. - aux: AR(4), h=1								
MA(30)	0.1001	0.7976	0.2000	0.7976	0.3004	0.7971	0.3998	0.7978
	[.0112]	[.0161]	[.0106]	[.0160]	[.0108]	[.0160]	[.0109]	[.0160]
Ind.Inf. - aux: AR(8), h=1								
MA(30)	0.1001	0.7960	0.2000	0.7960	0.2999	0.7960	0.3997	0.7956
	[.0108]	[.0159]	[.0105]	[.0159]	[.0106]	[.0160]	[.0108]	[.0160]
T= 10000								Replicazioni= 1000

5. Conclusioni

In questo lavoro è stata presentata una verifica del comportamento asintotico delle stime di Inferenza Indiretta per modelli ARFIMA. Gli esperimenti Monte Carlo effettuati hanno evidenziato che, per ampiezze campionarie limitate, la stima ottenuta con il metodo dell'Inferenza Indiretta presenta risultati paragonabili a quelle della Massima Verosimiglianza secondo Whittle. All'aumentare della lunghezza della serie, tuttavia, si nota che l'Inferenza Indiretta presenta errori standard abbastanza lontani da quelli Massima Verosimiglianza sia per il parametro d che per σ^2.

E' anche emerso che l'uso di modelli ausiliari con un numero di parametri superiore a quello del modello di interesse non porta necessariamente ad un miglioramento delle stime, specie per lunghezze della serie limitate. Tale situazione si risolve essenzialmente per serie di lunghezza superiore ai 1000 dati. Si è osservata una certa difficoltà computazionale per le stime di EMM a causa della forma della funzione obiettivo.

Da quanto esposto si individuano interessanti linee di ricerca future. Dovrà essere innanzitutto investigato se i risultati ottenuti vengono confermati nel caso di modelli ARFIMA(p, d, q) con ordini AR e MA non nulli, e procedere al calcolo della matrice di covarianza degli stimatori di Inferenza Indiretta per un ulteriore confronto con la Massima Verosimiglianza e per valutare l'opportunità del ricorso a tecniche di riduzione della varianza.

Ringraziamenti: Questo lavoro è stato svolto con il prezioso contributo di Giorgio Calzolari. Si ringraziano i referees per i suggerimenti ricevuti, ma l'Autore è la sola responsabile di ogni errore.
Il lavoro è stato svolto nell'ambito del progetto di interesse nazionale MIUR "Modelli stocastici e metodi di simulazione per dati dipendenti" e del progetto CNR "Modelli statistici di serie temporali per la previsione".

Riferimenti bibliografici

Agiakloglou C., Newbold P., Wohar M. (1992) Bias in an Estimator of the Fractional Difference Parameter, *Journal of Time Series Analysis*, 14, 235-246.

Bardet J. M., Lang G., Oppenheim G., Philippe A., Taqqu M. S. (2002) Generator of Long-Range Depenedent Processes: a Survey, *WP Université Paul Sabatier-Tolosa III, Tolosa*.

Baillie R. T. (1996) Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics, *Journal of Econometrics*, 73, 5-59.

Beran J. (1995) *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman and

Hall, New York.

Bianchi C., Cleur E. M. (1996) Indirect Estimator for Stochastic Differential Equation Models: Some Computational Experiments, *Computational Economics*, 9, 257-274.

Brockwell P., Davis R. (1991) *Times Series: Theory and Methods*, Springer, New York.

Calzolari G., Di Iorio F., Fiorentini G. (1998) Control Variates for Variance Reduction in Indirect Inference: Interest Rate Models in Continuous Time, *Econometrics Journal*, 1, C100-C112.

Calzolari G., Di Iorio F., Fiorentini G. (2001a) Indirect Inference and Variance Reduction Using Control Variates, *Metron*,vol.LIX, n.1-2,39-53.

Calzolari G., Fiorentini G., Sentana E. (2001b) Constrained Indirect Inference Estimation, *London School of Economics, Financial Market Group*, DP n.384.

Corduas M. (1997) Indirect Inference for Fractional Time Series Model, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 59, 221-232.

Doornik J. A., Ooms M. (1989) Computational Aspects of Maximum Likelihood Estimation of Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average Models, *WP Nuffield College, Oxford University*.

Fox R., Taqqu M. S. (1986) Large Sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series, *Annals of Statistics*,14, 517-532.

Galbrath J. W., Zinde-Walsh V. (2001) Analytical Indirect Inference, *mineo ESEM-2001 Losanna, CH.*

Gallant R., Tauchen G. (1996) Which Moments to Mach?, *Econometric Theory*, 12, 657-681.

Geweke J., Porter-Hudak S. (1983) The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models, *Journal of Time Series Analysis*, 4, 221-238.

Gouriéroux C., Monfort A., Renault E. (1993) Indirect Inference, *Journal of Applied Econometrics*, 8, S85-S118.

Granger C., Joyeux J. (1980) An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing, *Journal of Time Series Analysis*, 1, 15-30.

Hosking J. (1981) Fractional Differencing, *Biometrika*, 68, 165-176.

Koop G., Ley E., Osiewalsky J., Steel M. F. J. (1997) Bayesian Analysis of Long Memory and Persistence using ARFIMA Models, *Journal of Econometrics*, 76, 149-169.

Janaceck G. J. (1982) Determining the Degree of Differencing for Time Series via the Log Spectrum, *Journal of Time Series Analysis*, 177-183.

Martin V. L., Wilkins N. P. (1999) Indirect Estimation of ARFIMA and VARFIMA Models, *Journal of Econometrics*, 93, 149-175.

Pastorello S. Renault E., Touzi N. (1994) Statistical Inference for Random Variates Option Pricing, *Quaderno n.31, Dipartimento di Scienze Economiche, Università di Padova*.

Sowell F. (1992) Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models, *Journal of Econometrics*, 53, 165-188.

Tieslau M. A., Schmidt P., Baillie R. T. (1996) A Minimum Distance Estimator for Long-Memory Processes, *Journal of Econometrics*, 71, 249-264.