

## **Il meccanismo dei confronti appaiati nella modellistica per graduatorie: sviluppi statistici ed aspetti critici**

Angela D'Elia

*Dipartimento di Scienze Statistiche, Università di Napoli Federico II*  
*E-mail: angdelia@unina.it*

*Summary:* The main issue addressed in the paper is the statistical development of a widely used structure for the analysis of the preferences: the paired comparisons framework. In particular the paper focuses on the probabilistic and statistical aspects of the paired comparisons model when the preferences are expressed by means of ranks. The model shows a good performance in terms of meaningful parameters and for its flexibility when used to study the relation between the raters' features and the preferences they express. Nevertheless, it is highlighted that the paired comparison model has a poor fit to the empirical distributions of ranks if the number of ranked objects is not small and it is shown that a different structure, the Inverse Hypergeometric random variable, seems more adequate, in this situation, to model ranks. Thus, a more general approach, based on a Bayesian perspective, is proposed as reference model for the analysis of the preferences.

*Key words:* Models for Ranks, Paired Comparisons, Preferences Measures.

### ***1. Introduzione***

Obiettivo di questo lavoro è discutere le potenzialità ed i problemi connessi ad un approccio (i *confronti appaiati*) ampiamente presente nella letteratura sull'analisi statistica delle graduatorie di preferenze.

L'interesse per uno studio statistico delle graduatorie non è nuovo, a causa dei numerosi ambiti nei quali risulta utile disporre di una valutazione quantitativa dei giudizi espressi dai soggetti intervistati nei confronti di  $m > 1$  alternative, sia per quanto concerne il loro grado di concordanza (Daniels, 1950; Agresti, 1977; Feigin e Cohen, 1978; Tanner e Young, 1985; Basu *et al.*, 1999), sia relativamente ad una misura di distanza rispetto ad una graduatoria "ideale" (Mallows, 1957; Fligner e Verducci, 1988; Critchlow e Verducci, 1992). Lo studio delle graduatorie, infatti, a seconda dell'ambito nel quale si svolge, può concretizzarsi in analisi delle preferenze (dei consumatori, degli elettori, degli spettatori, ecc.) come nel caso delle scienze sociali, del marketing e della politica (Taplin, 1997), ma anche in strumento di valutazione di situazioni, come avviene, principalmente, in medicina e psicomelia (valutazione dello stadio di avanzamento di una malattia, classificazione di radiografie, di stimoli, ecc.).

E' proprio nell'ambito degli studi psicometrici che si sono sviluppati alcuni tra i più importanti metodi per l'analisi di dati categorici ordinali, soprattutto sotto forma di "modelli per confronti appaiati", come nel caso del modello di Bradley-Terry e delle sue generalizzazioni (Davidson e Bradley, 1969; Bradley, 1976; Stern, 1990). Usualmente, l'impostazione seguita è stata quella di pervenire a misure sintetiche dei giudizi qualitativi ordinali (ad es. migliore, peggiore), espressi nel confronto di ciascuna coppia di oggetti, considerando il numero di volte che un oggetto risulta preferito ad un altro (ad esempio con la matrice dei confronti appaiati, Marden, 1995, pp.19-20).

L'estensione del numero di categorie ordinali considerate (ad es. molto migliore, migliore, indifferente, peggiore, molto peggiore) ha prodotto lo sviluppo dei modelli ad *odds* proporzionali (Mc Cullagh, 1980), logit per categorie appaiate (Agresti, 1984 pp. 216-220), *stereotype* (Anderson, 1984), log-log complementare ordinali (Crouchley, 1995), e log-lineari per confronti appaiati (Dittrich *et al.*, 1998), mediante i quali è possibile studiare la relazione tra le covariate caratterizzanti i soggetti (*raters*) e i giudizi da essi espressi nei confronti delle alternative presentategli. Tra gli altri, un modello probit ordinale a struttura gerarchica bayesiana è stato sviluppato recentemente da Bradlow e Zaslavsky (1999), per affrontare il

problema delle non risposte.

In tale ambito, questo lavoro affronta il problema di discutere un modello che prende lo spunto da uno dei criteri base secondo il quale vengono formulate le graduatorie di preferenze. In tal senso, esso si ricollega all'impostazione originaria del modello di Bradley-Terry, nel senso che la struttura probabilistica sviluppata viene derivata da uno schema riconducibile al meccanismo dei "confronti appaiati". Esso, inoltre, si colloca nell'ambito dello sviluppo di modelli per l'analisi del legame tra le caratteristiche individuali dei *raters* e le valutazioni che essi esprimono: a differenza, però, di altri lavori, la variabile dipendente non è costituita da giudizi ordinali di natura categorica, bensì dai ranghi attribuiti a singoli oggetti nell'elaborazione di una graduatoria di preferenze.

Ora, se in generale l'analisi statistica dei ranghi richiede l'utilizzo di strumenti e tecniche appropriate (Kendall e Gibbons, 1990; Gibbons e Chakraborti, 1992), ciò risulta maggiormente vero in fase modellistica, perché in tal caso si tratta di specificare, e quindi stimare, modelli nei quali la variabile dipendente ha supporto discreto e limitato. Infatti, i ranghi attribuiti a  $m$  oggetti differenti possono assumere solo i valori interi compresi nell'intervallo  $[1, m]$ . Ne consegue che la natura dei ranghi rende, da un lato, inappropriato il ricorso al modello di regressione lineare, che è formulato per variabili dipendenti con supporto continuo e non limitato, e dall'altro suggerisce di sfruttare i vantaggi che la struttura dei Modelli Lineari Generalizzati (Nelder e Wedderburn, 1972) offre, sia per flessibilità di specificazione che in termini di facilità di interpretazione dei parametri.

La struttura dell'articolo è la seguente. Nel paragrafo 2 si introduce lo schema di riferimento (la matrice dei ranghi) e si presenta un approccio non parametrico all'analisi delle graduatorie. Successivamente si discute una possibilità di modellistica parametrica. In particolare, gli aspetti di natura probabilistica sono illustrati nel paragrafo 3, dove viene messo in luce come la genesi di una graduatoria di ranghi possa essere ricondotta sia al meccanismo dei confronti appaiati, sia ad uno schema tradizionale di estrazioni da urne; gli aspetti inferenziali ed interpretativi connessi a tale schema sono sviluppati nel paragrafo 4. Nel paragrafo 5 avviene la formulazione del modello statistico, in termini di modello li-

neare generalizzato: sono sviluppati sia gli aspetti inferenziali che quelli computazionali connessi alla massimizzazione numerica della funzione di log-verosimiglianza. Una verifica empirica del modello è illustrata nel paragrafo 6 in uno studio delle preferenze professionali di giovani universitari. Si mettono in luce, quindi, alcuni aspetti critici della modellistica illustrata in termini di bontà di adattamento alle distribuzioni osservate dei ranghi (paragrafo 7) e il miglior *fitting* prodotto da un diverso schema modellistico. Una discussione delle situazioni nelle quali una tipologia di modello risulta preferibile all'altra è svolta nel paragrafo 8, insieme con una proposta, di natura bayesiana, per riunificare i diversi approcci alla modellistica delle graduatorie. Alcune considerazioni finali relative a possibili ulteriori sviluppi concludono il lavoro.

## 2. Una misura della quota di gradimento

Sia  $\mathbf{R}=\{r_{ij}\}$  la matrice dei ranghi il cui generico elemento  $r_{ij}$  rappresenta il rango attribuito dall' $i$ -esimo soggetto all'oggetto  $j$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ), in una graduatoria che esprime l'ordine di preferenza rispetto a  $m$  alternative.

In tutto il lavoro si assume che nell'elaborazione di una graduatoria di preferenze per  $m$  alternative, il rango pari ad 1 sia attribuito all'oggetto che più si preferisce, il rango pari a 2 a quello immediatamente successivo in ordine di gradimento, sino ad arrivare al rango pari a  $m$  per l'oggetto meno gradito.

Indichiamo inoltre, per semplicità di notazione, con  $r_j$  il rango assegnato all'oggetto  $j$  per ogni fissato  $i$ .

L'approccio all'analisi dei ranghi che discuteremo nei paragrafi successivi fa riferimento ad una particolare struttura modellistica che viene sviluppata allo scopo di studiare le relazioni tra le graduatorie espresse dai singoli soggetti nei confronti di  $m$  alternative e le variabili esplicative che li caratterizzano.

Talvolta, però, può risultare utile disporre di uno strumento che consenta un'immediata rappresentazione delle preferenze espresse dai soggetti intervistati, senza presupporre necessariamente la specificazione e stima

di un modello.

Lo sviluppo di un approccio non parametrico all'analisi delle graduatorie ha una duplice motivazione. Dal punto di vista metodologico, esso trova fondamento in un'ottica *model-free*, cui si richiamano la maggior parte dei metodi statistici per l'analisi dei ranghi (Gibbons e Chakraborti, 1992) e che garantisce maggiore robustezza rispetto ai metodi parametrici, in presenza di deviazioni dal modello ipotizzato; d'altra parte, in termini applicativi, esso risponde all'esigenza di fornire all'utente uno strumento di analisi immediato e facilmente interpretabile.

In questo paragrafo presentiamo un indicatore sintetico del gradimento riscosso da ciascuna di  $m$  alternative: esso è da considerarsi non parametrico nel senso che prescinde da ogni ipotesi sulla distribuzione dei ranghi e da ogni impianto modellistico. Successivamente, mostreremo la relazione che esiste tra questo indicatore non parametrico e le misure ricavate dal modello illustrato nei paragrafi seguenti.

Se tra  $m$  alternative un oggetto  $j$  risulta quello maggiormente gradito da tutti gli  $n$  soggetti, allora esso riceverà sempre rango pari ad 1 e, di conseguenza, la somma  $t_j$  dei ranghi ad esso attribuiti sarà pari a  $n$ . Viceversa, se l'oggetto in questione è quello meno gradito, la somma  $t_j$  dei suoi ranghi risulterà pari a  $n * m$ .

Al fine di ottenere un indicatore relativo della quota di gradimento riscossa da ogni oggetto è possibile, quindi, considerare il rapporto

$$\pi_j = \frac{nm - t_j}{nm - n} = \frac{m - \bar{r}_j}{m - 1}$$

dove  $\bar{r}_j$  rappresenta la media campionaria dei ranghi assegnati all'oggetto  $j$ . Tale rapporto varia tra 0 ed 1 ed esprime, *in modo diretto*, la percentuale di gradimento rispetto al massimo che spetta ad ognuno degli  $m$  oggetti.

A tale riguardo si può anche proporre un indicatore normalizzato della quota di gradimento che, quindi, risulterà:  $\pi_j^* = [(nm - t_j)/(nm - n)] * c$  dove  $c = 2/m$  è una costante necessaria affinché  $\sum_{j=1}^m \pi_j^* = 1$ . Tale indice varia tra 0 (quando  $t_j = nm$ ) e  $2/m$  (quando  $t_j = n$ ): nel primo caso all'oggetto  $j$  compete una quota nulla di gradimento, mentre nel secondo caso la quota è massima. Nel seguito ci limiteremo a discutere sviluppi e risultati relativi soltanto all'indice  $\pi_j$ .

Evidentemente, l'indice introdotto può essere calcolato sui ranghi espressi da sottoinsiemi distinti (ad esempio, per sesso) della popolazione dei *raters*, consentendo quindi l'individuazione delle caratteristiche dei soggetti che determinano il presentarsi di una graduatoria piuttosto che un'altra.

In effetti l'analisi delle relazioni eventualmente esistenti tra caratteristiche dei *raters* e graduatorie espresse può e deve essere condotta in modo più articolato mediante la formulazione di una appropriata modellistica, come illustreremo nei paragrafi successivi.

### 3. La struttura probabilistica

Come abbiamo evidenziato in precedenza (paragrafo 1), uno degli schemi più ricorrenti nella letteratura statistica sull'analisi delle graduatorie è il cosiddetto meccanismo dei confronti appaiati. Esso ha un duplice fondamento di natura concettuale e probabilistica.

Infatti, da un punto di vista interpretativo, è lecito ipotizzare che, per ciascun soggetto, l'attribuzione del rango  $r_j$  ad un generico oggetto  $j$  richieda un meccanismo, più o meno esplicito, mediante il quale l'oggetto viene messo a confronto con le  $m - 1$  alternative, al fine di stabilire la sua collocazione nella graduatoria.

In particolare, il risultato di ogni confronto tra l'oggetto in questione e i rimanenti  $m - 1$  si concretizza nella scelta o meno dell'oggetto considerato. Se l'oggetto  $j$  risulta scelto (preferito) in tutti gli  $m - 1$  confronti, allora esso viene collocato al primo posto della graduatoria, con rango pari ad 1. Come avviene nella letteratura sui confronti appaiati, si assume che gli  $m - 1$  confronti dell'oggetto  $j$  con le alternative siano mutuamente indipendenti (ad esempio, Bradley, 1969; Dittrich, 1998).

Introduciamo, quindi, la variabile indicatrice  $W_{jh}$  che esprime il risultato del confronto tra l'oggetto  $j$  e l'oggetto  $h$ :

$$\begin{aligned} W_{jh} &= 0, && \text{se l'oggetto } j \text{ è preferito all'oggetto } h \\ W_{jh} &= 1, && \text{se l'oggetto } j \text{ **non** è preferito all'oggetto } h . \end{aligned}$$

La variabile indicatrice  $W_{jh}$  è quindi una variabile casuale (v.c.) di Bernoulli, con parametro  $\psi_j = Pr(W_{jh} = 1)$ . Ovviamente,  $W_{jj} = 1$ , con

probabilità pari ad 1, perché è certo che l'oggetto  $j$  non è preferito a se medesimo.

Si noti che per le ipotesi fatte, le v.c.  $W_{jh}$  e  $W_{jk}$  ( $\forall h \neq k$ ) sono mutuamente indipendenti. Allora, la variabile casuale somma:

$$S_j = \sum_{h \neq j} W_{jh}$$

è distribuita come una v.c. Binomiale, con parametri  $(m - 1, \psi_j)$  e con distribuzione di probabilità

$$Pr(S_j = s) = \binom{m-1}{s} \psi_j^s (1 - \psi_j)^{m-1-s}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1.$$

La v.c.  $S_j$  assume i valori  $0, 1, 2, \dots, m-1$ , a seconda che l'oggetto  $j$  risulti preferito in tutti i confronti con gli altri  $m-1$  oggetti, in tutti i confronti meno 1, in tutti i confronti meno 2, ..., in nessuno degli  $m-1$  confronti. Essa può quindi essere interpretata come il numero di “fallimenti” che l'oggetto  $j$  subisce durante la sua collocazione in una graduatoria di preferenze. Se l'oggetto  $j$  non subisce alcun fallimento, viene collocato al primo posto della graduatoria ( $r_j = 1$ ), se subisce un fallimento è collocato al secondo posto ( $r_j = 2$ ), e così via fino all' $m$ -esimo posto ( $r_j = m$ ) dove si colloca quell'oggetto che in ognuno degli  $m-1$  confronti risulta essere **non** preferito.

E' naturale quindi definire la variabile generatrice dei ranghi effettivamente osservati come:

$$R_j = S_j + 1. \quad (1)$$

Per ciascun  $i$ -esimo soggetto, il rango  $r_j$  attribuito all'oggetto  $j$  risulta dunque essere realizzazione di una v.c. “Binomiale traslata”  $R_j$ , con la seguente distribuzione di probabilità:

$$Pr(R_j = r) = \binom{m-1}{r-1} \psi_j^{r-1} (1 - \psi_j)^{m-r}, \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Tale v.c., coerentemente con la natura dei ranghi, assume i soli valori  $[1, 2, \dots, m]$ .

Il calcolo ricorsivo delle probabilità avviene agevolmente tramite le seguenti espressioni:

$$Pr(R_j = 1) = (1 - \psi_j)^{m-1};$$

$$Pr(R_j = r + 1) = \left( \frac{\psi_j}{1 - \psi_j} \right) \binom{m-r}{r} Pr(R_j = r), \quad r = 1, 2, \dots, m - 1.$$

Mostriamo ora come la v.c. Binomiale traslata  $R_j$  possa essere definita anche a partire da uno schema di estrazioni di palline da urne.

A tale scopo, si considerino  $m$  alternative:  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , ed  $m$  urne:  $U_1, U_2, \dots, U_m$ . Fissata una specifica alternativa  $A_j$ , le  $m$  urne hanno la seguente composizione:

- l'urna  $U_j$  è composta esclusivamente da palline diverse da  $A_j$ ;
- l'urna  $U_h$  è composta da palline  $A_j$  con frequenza relativa pari a  $\psi_j$ , e da palline  $A_h$  con frequenza  $1 - \psi_j$ , ( $h = 1, 2, \dots, j - 1, j + 1, \dots, m$ ).

La prova consiste nell'estrarre una pallina da ciascuna urna; il risultato di ogni sottoprova (estrazione dall'urna  $h = 1, 2, \dots, m$ ) è rappresentato da una variabile casuale di Bernoulli  $V_{jh}$ :

$$\begin{aligned} V_{jh} &= 0, & \text{se si verifica } A_j; \\ V_{jh} &= 1, & \text{se **non** si verifica } A_j. \end{aligned}$$

Evidentemente la v.c.  $V_{jj}$  è degenere, perché nell'estrazione dall'urna  $U_j$ , l'evento  $\{\text{non si verifica } A_j\}$  ha probabilità  $\psi_j = 1$ .

Allora i ranghi osservati per un'alternativa  $A_j$  possono essere considerati realizzazioni della v.c.  $R_j$ :

$$R_j = \sum_{h=1}^m V_{jh},$$

che assume i valori  $[1, 2, \dots, m]$ .

E' immediato notare che tale variabile è del tutto equivalente a quella definita nell'espressione (1) come risultato del meccanismo dei confronti

appaiati, con la medesima distribuzione di probabilità riportata nella (2).

Lo schema proposto per il rango attribuito ad un oggetto  $j$ , può immediatamente essere esteso all'intera matrice dei ranghi  $\mathbf{R}$ .

In particolare per ciascuna riga della matrice  $\mathbf{R}$ , è possibile scrivere:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{1}' * \mathbf{W}'_i \quad (3)$$

dove  $\mathbf{1}$  rappresenta il vettore unitario di  $m$  elementi, e  $\mathbf{W}_i$  è la matrice ( $m \times m$ ) con elemento generico  $w_{jh}$ , realizzazione della variabile indicatrice  $W_{jh}$  precedentemente introdotta. Tale matrice esprime per l' $i$ -esimo soggetto il risultato dei confronti tra coppie di oggetti che determinano il rango attribuito all'oggetto  $j$ . Applicando la (3) a tutti gli  $n$  soggetti, si ottengono le  $n$  righe della matrice  $\mathbf{R}$ .

Ciascuna riga di tale matrice è evidentemente costituita da una permutazione dei primi  $m$  numeri interi. Tale permutazione è il risultato del meccanismo di confronti appaiati precedentemente descritto; ma è anche vero che i giudizi di valore che determinano il risultato dei confronti non sono basati solo su criteri oggettivi, ma anche soggettivi (gusti, preferenze, ecc.). Per tale motivo sarà importante sviluppare una struttura modellistica (paragrafo 5) che consenta di mettere in relazione le caratteristiche individuali di ciascun soggetto e la permutazione (la graduatoria) da lui espressa.

Preliminarmente affrontiamo alcune problematiche connesse al significato del parametro  $\psi_j$ , caratterizzante la v.c. Binomiale traslata.

#### ***4. Inferenza per la distribuzione dei ranghi***

Per la v.c. Binomiale traslata, l'andamento della distribuzione di probabilità (monotono crescente, decrescente, campanulare) dipende dal valore del parametro  $\psi_j$ .

In particolare, si noti che esiste una relazione inversa tra il parametro  $\psi_j$  e la probabilità che l'oggetto  $j$  sia quello maggiormente preferito, cioè  $Pr(R_j = 1)$ . Infatti se  $\psi_j \rightarrow 0$ , allora  $Pr(R_j = 1) \rightarrow 1$ , e, viceversa, se  $\psi_j \rightarrow 1$ , allora  $Pr(R_j = 1) \rightarrow 0$ . Ciò significa che il parametro  $\psi_j$

deve essere interpretato come una *misura di non gradimento* per l'oggetto  $j$ . Infatti al crescere di  $\psi_j$ , diminuisce la probabilità che l'oggetto in questione sia collocato al primo posto della graduatoria.

Tale relazione può essere esplicitata anche in termini di valore medio della v.c.  $R_j$ . Dalla (1), infatti, si ricava immediatamente che:

$$\mathbb{E}(R_j) = \mathbb{E}(S_j) + 1 = (m - 1)\psi_j + 1;$$

$$\text{Var}(R_j) = \text{Var}(S_j) = (m - 1)\psi_j(1 - \psi_j).$$

Ne consegue che quando  $\psi_j \rightarrow 0$ ,  $\mathbb{E}(R_j) \rightarrow 1$ , e viceversa quando  $\psi_j \rightarrow 1$ , allora  $\mathbb{E}(R_j) \rightarrow m$ ; quindi in corrispondenza del valore massimo per il *parametro di non gradimento*, si ha un valore atteso del rango pari a  $m$ , (l'ultimo posto della graduatoria). Si noti, inoltre, che in corrispondenza di valori estremi per il parametro  $\psi_j$  ( $\psi_j=0$  oppure  $\psi_j=1$ ), la v.c.  $R_j$  diviene degenera, con massa di probabilità interamente distribuita sui valori 1 e  $m$ , rispettivamente.

Siano  $r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{nj}$  i ranghi osservati in un campione di  $n$  soggetti per l'oggetto  $j$ . Poiché  $Pr(R_j = 1) = (1 - \psi_j)^{m-1}$ , è possibile ottenere uno stimatore iniziale consistente di  $\psi_j$  considerando la frequenza relativa  $f_{1j}$  con cui l'oggetto  $j$  ha ottenuto rango pari ad 1. Infatti, mediante il metodo dei momenti, si ha:

$$(1 - \psi_j)^{m-1} = f_{1j}$$

da cui risulta:

$$\hat{\psi}_j = 1 - \exp\left(\frac{1}{m-1} \log(f_{1j})\right).$$

Ne segue che:

$$\begin{array}{ll} \text{se } f_{1j} \rightarrow 0, & \text{allora } \hat{\psi}_j \rightarrow 1; \\ \text{se } f_{1j} \rightarrow 1, & \text{allora } \hat{\psi}_j \rightarrow 0; \\ \text{se } f_{1j} \rightarrow (1/2)^{m-1}, & \text{allora } \hat{\psi}_j \rightarrow 1/2; \end{array}$$

coerentemente con l'interpretazione di  $\psi_j$  come *parametro di non gradimento* per l'oggetto  $j$ .

La funzione di log-verosimiglianza, sulla base del modello probabilistico introdotto, risulta:

$$\log \mathcal{L}(\psi_j; \mathbf{r}_j) \propto \sum_{i=1}^n (r_{ij} - 1) \log(\psi_j) + \sum_{i=1}^n (m - r_{ij}) \log(1 - \psi_j).$$

Posto  $T_j = \sum_{i=1}^n (r_{ij})$  e  $\bar{R}_j = T_j/n$ , si ha:

$$\begin{aligned} \log \mathcal{L}(\psi_j) &\propto (T_j - n) \log(\psi_j) + (mn - T_j) \log(1 - \psi_j) = \\ &= n(\bar{R}_j - 1) \log(\psi_j) + n(m - \bar{R}_j) \log(1 - \psi_j). \end{aligned}$$

Pertanto, lo stimatore di massima verosimiglianza risulta:

$$\hat{\psi}_{j(MV)} = \frac{\bar{R}_j - 1}{m - 1}, \quad (4)$$

che si dimostra essere non distorto per  $\psi_j$ . Si noti che lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\psi_j$  è una trasformazione lineare della v.c. rango medio  $\bar{R}_j$  attribuito all'oggetto  $j$ .

E' possibile, inoltre, ricavare una relazione tra il parametro  $\psi_j$ , e l'indicatore della quota di gradimento  $\pi_j$  introdotto nel paragrafo 2.

Infatti, nell'ottica del campionamento ripetuto, considerando  $\pi_j$  come realizzazione della v.c.  $\Pi_j$ , si ha:

$$\mathbb{E}(\Pi_j) = \frac{nm - \mathbb{E}(T_j)}{nm - n} = \frac{nm - n[(m - 1)\psi_j + 1]}{n(m - 1)}$$

da cui, infine:

$$\mathbb{E}(\Pi_j) = 1 - \psi_j.$$

Del resto, in virtù della (4), si ha anche:

$$\hat{\psi}_{j(MV)} = 1 - \Pi_j,$$

da cui, per la non distorsione di  $\hat{\psi}_{j(MV)}$ , risulta  $\mathbb{E}(\Pi_j) = 1 - \psi_j$ .

Il valor medio della quota di gradimento relativo  $\mathbb{E}(\Pi_j)$  risulta quindi *inversamente* collegato al parametro  $\psi_j$ : ciò è coerente con l'interpretazione

che si era data di  $\psi_j$  in termini di *misura di non gradimento*. Infatti, quanto maggiore è il non gradimento per l'oggetto  $j$ , tanto minore è la quota di preferenza che gli compete, e viceversa quanto maggiore è il gradimento.

Per sottoporre a verifica un'ipotesi nulla relativa al parametro  $\psi_j$  caratterizzante la distribuzione dei ranghi  $R_j$  è possibile procedere mediante il test del rapporto di verosimiglianza. In particolare, per verificare l'ipotesi  $H_0 : \psi_j = \psi_{j0}$  contro  $H_1 : \psi_j \neq \psi_{j0}$  deriviamo la statistica-test del rapporto di verosimiglianza, per la quale (sotto condizioni di regolarità) vale il Teorema di Wilks:

$$-2\log(\lambda) = -2[\log\mathcal{L}_0 - \log\mathcal{L}_{MV}] \xrightarrow{d} \chi_1^2,$$

dove  $\mathcal{L}_0$  e  $\mathcal{L}_{MV}$  indicano rispettivamente le funzioni di verosimiglianza calcolate in  $\psi_j = \psi_{j0}$  e in  $\psi_j = \psi_{j(MV)}$ .

Poiché:

$$\log\mathcal{L}_{MV} \propto n(\bar{R}_j - 1)\log(\bar{R}_j - 1) + n(m - \bar{R}_j)\log(m - \bar{R}_j) - n(m - 1)\log(m - 1),$$

e

$$\log\mathcal{L}_0 \propto n(\bar{R}_j - 1)\log(\psi_{j0}) + n(m - \bar{R}_j)\log(1 - \psi_{j0}),$$

mediante alcuni passaggi è possibile pervenire alla seguente regione di rifiuto per  $H_0$ :

$$\left(\frac{\bar{R}_j - 1}{\psi_{j0}}\right)^{(\bar{R}_j - 1)} \left(\frac{m - \bar{R}_j}{1 - \psi_{j0}}\right)^{(m - \bar{R}_j)} \geq \exp\left(\frac{\chi_{(\alpha;1)}^2}{2n}\right) (m - 1)^{(m-1)}.$$

Ora, la funzione

$$f(\bar{R}_j) = (\bar{R}_j - 1)\log(\bar{R}_j - 1) - (\bar{R}_j - 1)\log(\psi_{j0}) + (m - \bar{R}_j)\log(m - \bar{R}_j) - (m - \bar{R}_j)\log(1 - \psi_{j0})$$

ha il suo minimo in corrispondenza di  $\bar{R}_j = \psi_{j0}(m - 1) + 1$ , ed è simmetrica rispetto ad esso; ne consegue che la regione critica per l'ipotesi nulla  $H_0 : \psi_j = \psi_{j0}$  contro  $H_1 : \psi_j \neq \psi_{j0}$  può essere espressa anche come:

$$\{\underline{r} : |\bar{R}_j - \psi_{j0}(m - 1) - 1| \geq c_\alpha\},$$

dove il valore critico  $c_\alpha$  dipende dal numero di osservazioni  $n$  e dal numero di alternative  $m$  utilizzate per formulare la graduatoria.

### 5. Un modello logit per le graduatorie

Al fine di studiare l'eventuale legame tra le caratteristiche rilevate sui *raters* e le graduatorie che essi esprimono, la modellizzazione dei ranghi può avvenire specificando una relazione funzionale tra le variabili esplicative  $X_1, X_2, \dots, X_p$  (rilevate su ogni soggetto), i cui valori sono contenuti nella matrice  $\mathbf{X}$  e il parametro  $\psi_j$ , che esprime la misura di non gradimento. Per tale scopo, è naturale ricorrere alla struttura dei Modelli Lineari Generalizzati, adottando un'opportuna funzione legame tra il predittore lineare  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$  e il parametro  $\psi_j$ . In particolare è utile il ricorso alla funzione legame *logit*

$$\log\left(\frac{\psi_j}{1 - \psi_j}\right) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad (5)$$

sia per la natura delle variabili coinvolte (“Binomiale traslata”) sia per la facilità di interpretazione dei parametri che ne deriva.

In virtù della relazione, precedentemente esplicitata, tra il parametro  $\psi_j$  e il valor medio  $\mathbb{E}(R_j)$  della v.c. rango, adottando la specificazione propria di un modello logit si perviene alla seguente espressione:

$$\mathbb{E}(R_j) = (m - 1)\psi_j + 1 = (m - 1) \left( \frac{e^{\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}}}{1 + e^{\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}}} \right) + 1$$

da cui emerge che il valore medio di  $R_j$  cresce all'aumentare del valore del predittore lineare  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ . In particolare, è possibile individuare la seguente corrispondenza:

se $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \rightarrow -\infty$	allora $\mathbb{E}(R_j) \rightarrow 1$
se $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \rightarrow 0$	allora $\mathbb{E}(R_j) \rightarrow \frac{m+1}{2}$
se $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \rightarrow +\infty$	allora $\mathbb{E}(R_j) \rightarrow m$

Di conseguenza, quando il coefficiente  $\beta_k$  ha un segno positivo significa che, se aumenta il valore della variabile esplicativa  $X_k$  ( $k =$

1, 2, ..., p), peggiora il gradimento per l'oggetto  $j$  (il rango medio tende a  $m$ ); viceversa, un segno negativo di  $\beta_k$  comporta che ad incrementi della relativa variabile esplicativa corrisponda una diminuzione del valore del rango medio, e quindi un'accresciuta preferenza per l'oggetto in questione.

Si noti che poiché

$$\frac{1}{m-1} \log \left( \frac{Pr(R_j = m)}{Pr(R_j = 1)} \right) = \log \left( \frac{\psi_j}{1 - \psi_j} \right) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta},$$

è possibile interpretare i coefficienti  $\boldsymbol{\beta}$  del modello in termini di logaritmo degli *odds ratio* (OR). Però a differenza della specificazione "tipica" dei modelli logit (McCullagh e Nelder, 1989), in questo caso gli *odds* non sono definiti come  $Pr(A)/(1 - Pr(A))$ , bensì come il rapporto tra le probabilità del verificarsi di ranghi estremi,  $Pr(R_j = m)$  e  $Pr(R_j = 1)$ , con una logica più vicina a quella dei logit per "categorie adiacenti" o "a rapporto continuo", adoperati per risposte categoriche ordinali (Agresti, 1984).

In particolare, in presenza di un predittore lineare di primo grado ( $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \beta_0 + \beta_1 X$ ), il *log - odds ratio* corrispondente ad un incremento unitario della covariata  $X$  risulta:

$$\log(OR) = \log \left[ \left( \frac{Pr(R_j = m|x+1)}{Pr(R_j = 1|x+1)} \right) / \left( \frac{Pr(R_j = m|x)}{Pr(R_j = 1|x)} \right) \right] = \beta_1.$$

Pertanto, il parametro  $\beta_1$  misura come varia la probabilità di non gradire affatto l'oggetto  $j$  rispetto alla probabilità di attribuirgli preferenza massima, quando c'è un incremento unitario della variabile esplicativa  $X$ .

L'interpretazione dei coefficienti non muta in presenza di  $p$  variabili esplicative, purché sia effettuata a parità di condizioni delle altre  $p - 1$  covariate.

Siano  $r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{nj}$ , i valori campionari dei ranghi attribuiti da  $n$  soggetti ad un generico oggetto  $j$ , nella formulazione di una graduatoria di preferenze verso  $m$  oggetti.

In virtù della specificazione adottata nella (5) il contributo dell' $i$ -esima unità alla funzione di logverosimiglianza è il seguente:

$$\log \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\beta}; r_{ij}, \mathbf{x}_i) = (r_{ij} - 1)(\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}) - (m - 1) \log(1 + e^{\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}}),$$

dove con  $\mathbf{x}_i$  abbiamo indicato la  $i$ -esima riga della matrice  $\mathbf{X}$ , contenente i valori delle  $p$  variabili esplicative per l' $i$ -esimo soggetto ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Le stime di massima verosimiglianza dei parametri  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  si ottengono mediante una massimizzazione numerica della funzione di log-verosimiglianza (con algoritmi di ottimizzazione, tipo Newton-Raphson).

Allo scopo di migliorare la convergenza di tali algoritmi, diviene importante un'appropriata individuazione dei valori iniziali dei parametri da implementare nella *routine* di ottimizzazione.

Un'utile strategia può essere la seguente. Sfruttando la relazione:

$$\mathbb{E}(R_j | \mathbf{X} = \mathbf{x}_i) = (m - 1) \left( \frac{e^{\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}}}{1 + e^{\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}}} \right) + 1,$$

è possibile scrivere:

$$\frac{r_{ij} - 1}{m - 1} = \frac{e^{\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}}}{1 + e^{\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}}}$$

dove abbiamo sostituito al valor medio del rango  $\mathbb{E}(R_j | \mathbf{X} = \mathbf{x}_i)$  il rango osservato  $r_{ij}$ .

Mediante agevoli passaggi, si perviene alla seguente relazione:

$$\log \left( \frac{r_{ij} - 1}{m - r_{ij}} \right) = \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta},$$

per cui i valori iniziali delle stime dei parametri possono essere ottenuti come soluzioni dei Minimi Quadrati di

$$\mathbf{r}_j^* = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \epsilon$$

dove gli elementi di  $\mathbf{r}_j^*$  sono  $r_{ij}^* = \log \left( \frac{r_{ij} - 1}{m - r_{ij}} \right)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Per quanto riguarda, invece, il modello nullo, è possibile pervenire ad un'espressione esplicita dello stimatore del parametro  $\beta_0$ , che risulta essere:

$$\hat{\beta}_0 = \log \left( \frac{\bar{R}_j - 1}{m - \bar{R}_j} \right).$$

## ***6. Un'analisi delle aspettative professionali***

Un contesto nel quale più volte si è sviluppata l'analisi statistica delle preferenze è quello della valutazione del prestigio delle professioni (ad esempio Feigin e Cohen, 1978; Fligner e Verducci, 1988; Marden, 1992).

In questo paragrafo, illustriamo i risultati ottenuti durante uno studio relativo alle "aspettative" professionali di  $n = 183$  giovani, studenti universitari della Facoltà di Scienze Politiche. Le aspettative professionali vanno intese in termini di preferenze che gli studenti hanno espresso nei confronti di 14 differenti professioni. Infatti, ad ognuno di loro è stato proposto un questionario nel quale era richiesto di elaborare una graduatoria, in ordine di preferenza, di 14 professioni che generalmente sono ritenute degli "sbocchi naturali" per i laureati in Scienze Politiche. Su ciascuno studente sono state anche rilevate informazioni individuali (sesso, età, hobbies, professione del capofamiglia, ecc.), in modo da poter analizzare le relazioni tra caratteristiche degli individui e tipologia di preferenze espressa.

### ***6.1 Analisi esplorativa delle graduatorie***

I risultati dell'analisi hanno messo in luce numerose relazioni esistenti tra le caratteristiche soggettive e il gradimento verso le professioni prospettate.

L'analisi delle graduatorie di preferenze per le 14 professioni è stata innanzitutto condotta in modo non parametrico, cioè prescindendo da strutture di tipo modellistico. L'attenzione, dunque, è stata inizialmente concentrata sulla sintesi dei ranghi attribuiti ad ogni professione.

In particolare, è stata calcolata la quota di preferibilità relativa ( $\pi_j$ ) che compete alle singole professioni, distinguendo tra i ranghi attribuiti dai Maschi ( $n=91$ ) e quelli attribuiti dalle Femmine ( $n=92$ ) (Tabella 1).

Emerge un nucleo di 4 professioni che risultano le più gradite sia dai Maschi che dalle Femmine (Giornalismo, Pubbliche Relazioni, Diplomazia e Marketing): ad ognuna di essa compete una quota di gradimento sempre superiore al 55%. In particolare, nei Maschi il Giornalismo ha

una quota di preferibilità che rappresenta il 74% della quota massima teorica di preferenza ( $2/m=0.1428$ ), dato  $m$ ; nelle Femmine, invece, la quota maggiore di preferenze va alle Pubbliche Relazioni (75% del massimo). Una sostanziale omogeneità esiste anche per le professioni che si collocano in una posizione intermedia, cioè dove il valore dell'indice  $\pi_j$  si attesta intorno a  $1/2$ ; a tal proposito va segnalata la differente collocazione, nei due sessi, delle attività di Consulenza. Per le professioni meno gradite si evidenzia la diversa preferenza che Maschi e Femmine hanno per l'attività Politica e Sindacato, che nei primi riscuote una quota di gradimento relativo pari al 57%, mentre nelle seconde è pari solo al 33%.

Tabella 1. Quote di preferibilità relativa per le 14 professioni

MASCHI	$\pi_j$	FEMMINE	$\pi_j$
<i>Giornalismo</i>	0.7399	<i>Pubbl. Relaz.</i>	0.7483
<i>Diplomazia</i>	0.7119	<i>Giornalismo</i>	0.7280
<i>Pubbl. Relaz.</i>	0.5936	<i>Marketing</i>	0.7238
<i>Marketing</i>	0.5838	<i>Diplomazia</i>	0.6279
<i>Politica e Sind.</i>	0.5677	<i>Pubbl. Ammin.</i>	0.5775
<i>Imprenditoria</i>	0.5369	<i>Imprenditoria</i>	0.4963
<i>Pubbl. Ammin.</i>	0.5229	<i>Consulenza</i>	0.4529
<i>Editoria</i>	0.4550	<i>Editoria</i>	0.4501
<i>Finanza e Cred.</i>	0.4389	<i>Finanza e Cred.</i>	0.4354
<i>Insegnamento</i>	0.4060	<i>Ricerca</i>	0.3857
<i>Ricerca</i>	0.3948	<i>Insegnamento</i>	0.3619
<i>Consulenza</i>	0.3843	<i>Commercialista</i>	0.3514
<i>Commercialista</i>	0.3577	<i>Assicurazioni</i>	0.3304
<i>Assicurazioni</i>	0.3059	<i>Politica e Sind.</i>	0.3297

## 6.2 Analisi modellistica delle graduatorie

Vediamo ora come, pur trovandoci in una situazione nella quale  $m=14$  appare piuttosto elevato per rendere plausibile un meccanismo di confronti appaiati, il modello sviluppato nei precedenti paragrafi possa offrire utili interpretazioni se esaminato nell'ottica dei Modelli Lineari Generalizzati.

A tal fine, lo studio delle differenze emerse nell'analisi condotta sinora e numerosi altri aspetti sono stati quindi approfonditi mediante un'analisi di tipo modellistico, mettendo in relazione le caratteristiche individuali degli intervistati con le graduatorie da essi espresse.

Evidentemente dalla Tabella 1 emerge che l'attività di Pubbliche Relazioni riscuote un diverso gradimento dai Maschi e dalle Femmine. Individuato, dunque il Sesso come variabile esplicativa, i valori della funzione di log-verosimiglianza per i modelli nullo, stimato e saturo risultano:

$$\mathcal{L}_0 = -1506.5 \quad \mathcal{L}_\beta = -1474.0 \quad \mathcal{L}_n = -1156.0.$$

Le stime dei parametri ottenute con il metodo della massima verosimiglianza sono:

*Tabella 2. Modello delle preferenze per "Pubbliche Relazioni"*

Variabili	Stime	<i>Err. stand.</i>	Test asint.	p-valori
Costante	-0.3781	0.0593	-6.3800	0.0000
Sesso	-0.7116	0.0892	-7.9800	0.0000

Quindi, il modello stimato per i ranghi attribuiti alla professione Pubbliche Relazioni, in funzione della variabile dicotomica Sesso (D=0 per i Maschi, D=1 per le Femmine), risulta il seguente:

$$\mathbb{E}(R) = 1 + \left( \frac{13}{1 + \exp[-(-0.3781 - 0.7116 * D_i)]} \right)$$

da cui si ottiene:  $\mathbb{E}(R|D=0) = 6.2857$  e  $\mathbb{E}(R|D=1) = 4.2717$ . Nella graduatoria delle preferenze, le femmine collocano l'attività di Pubbliche Relazioni mediamente due posizioni più in alto di quanto fanno i Maschi.

Inoltre, la quantità

$$\exp(\beta_1) = \exp(-0.7116) = 0.4908$$

indica che il "non gradimento" per le Pubbliche Relazioni diminuisce del 51% passando da Maschi a Femmine. Ovvero, nelle Femmine la probabilità di preferire le Pubbliche Relazioni è più che doppia rispetto ai Maschi ( $1/0.4908 = 2.0375$ ).

Sempre relativamente alla variabile Sesso, la Tabella 1 mette in luce un notevole differenza nell'atteggiamento verso l'attività di Consulenza. In tal caso le stime dei parametri risultano:

*Tabella 3. Modello delle preferenze per "Consulenza"*

Variabili	Stime	<i>Err. stand.</i>	Test asint.	p-valori
Costante	0.4699	0.0597	7.8670	0.0000
Sesso	-0.2820	0.0833	-3.3854	0.0004

Ne discende che l'avversione per le attività di Consulenza, nel passaggio da Maschi a Femmine, diminuisce di circa il 25% ( $\exp(\beta_1) = \exp(-0.2820) = 0.7543$ ).

Per l'attività di Ricerca, è risultata significativa la variabile "Numero di libri non scolastici letti durante l'ultimo anno", che può essere considerata una *proxy* della vivacità di interessi culturali dell'intervistato.

I valori della funzione di log-verosimiglianza dei modelli nullo, stimato e saturo sono risultati:

$$\mathcal{L}_0 = -1591.04 \quad \mathcal{L}_\beta = -1575.52 \quad \mathcal{L}_n = -1155.77.$$

Le stime di massima verosimiglianza dei parametri sono le seguenti:

*Tabella 4. Modello delle preferenze per "Ricerca"*

Variabili	Stime	<i>Err. stand.</i>	Test asint.	p-valori
Costante	0.6541	0.0578	11.3207	0.0000
N° libri letti	-0.0522	0.0100	-5.2187	0.0000

I valori stimati mostrano che il gradimento per le attività legate al mondo della ricerca cresce all'aumentare del numero di libri non scolastici letti. In particolare, il valore  $\exp(\beta_1) = \exp(-0.0522) = 0.9491$  significa che per ogni libro letto in più il "non gradimento" per la Ricerca diminuisce di circa il 5%.

Mostriamo, infine, i risultati ottenuti per l'attività Politica e Sindacato.

L'analisi dei ranghi espressi da Maschi e Femmine ha già evidenziato la maggiore preferenza che i primi accordano a tale tipo di attività.

La specificazione modellistica ha messo in luce anche l'esistenza di altre variabili esplicative significative in termini di gradimento per l'attività politica. Esse sono risultate, in aggiunta al Sesso, l'Età e la variabile dicotomica che indica se il capofamiglia eserciti o meno la Libera Professione (LP=0 no, LP=1 si).

I valori della funzione di log-verosimiglianza nei modelli nullo, stimato e saturo sono:

$$\mathcal{L}_0 = -1636.15 \quad \mathcal{L}_\beta = -1548.69 \quad \mathcal{L}_n = -909.13.$$

Le stime di massima verosimiglianza sono le seguenti:

*Tabella 5. Modello delle preferenze per "Politica e Sindacato"*

Variabili	Stime	<i>Err.stand.</i>	Test asint.	p-valori
Costante	-1.7136	0.3679	-4.6572	0.0000
Sesso	1.0137	0.0860	11.7894	0.0000
Età	0.0654	0.0174	3.7662	0.0001
Lib. Prof.	0.6400	0.1465	4.3685	0.0000

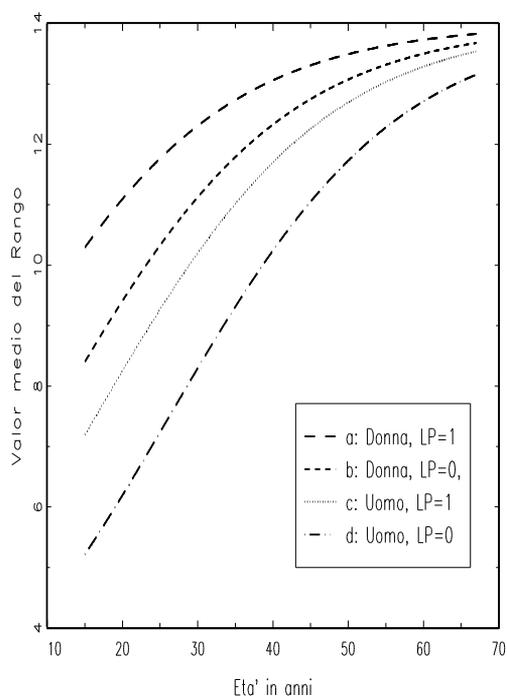
Il segno positivo delle stime dei coefficienti corrispondenti alle tre variabili esplicative esprime che il "non gradimento" per l'attività politica aumenta passando da Maschi a Femmine, con l'età, e in quei soggetti il cui capofamiglia esercita la libera professione. In particolare, nelle Femmine l'*odds-ratio* di "non gradimento" è circa il triplo che nei Maschi ( $\exp(1.0137)=2.7558$ ); quando il capofamiglia è libero professionista l'*odds-ratio* di "non gradimento" è circa il doppio ( $\exp(0.64)=1.8965$ ); infine, per ogni incremento unitario dell'età, si ha un aumento nell'*odds-ratio* di "non gradimento" pari a circa il 7% ( $\exp(0.0654) = 1.0676$ ).

Poiché una delle variabili esplicative (Età) è continua è possibile rappresentare graficamente l'andamento del valor medio del rango, attribuito alla professione Politica e Sindacato, in funzione dell'Età, per profili differenti dei soggetti (cioè, per diversi valori delle altre due variabili esplicative dicotomiche).

Dalla Figura 1 emerge come la preferenza per l'attività politica diminuisca con l'Età (il rango medio tende a 14); nell'interpretazione di tale risultato va, comunque, considerato che le stime sono state ottenute su un campione di giovani universitari del primo anno di corso, per i quali il campo

di variazione della variabile Età risulta piuttosto ristretto (generalmente 19-22 anni).

Negli Uomini il rango medio attribuito alla Politica è sempre inferiore che nelle Donne, segno quindi di un maggiore gradimento; infine, coloro che hanno un capofamiglia libero professionista (LP=1) attribuiscono, a prescindere dal sesso, all'attività politica un rango sistematicamente maggiore di quelli il cui capofamiglia non esercita la libera professione (LP=0): nelle graduatorie di preferenze, quindi, la Politica si colloca più in alto se il capofamiglia non è libero professionista.



*Figura 1. Valor medio dei ranghi per l'attività politica e sindacale in funzione dell'Età*

## 7. Alcuni aspetti critici

Abbiamo illustrato sinora una possibile modellizzazione dei ranghi, derivante da una struttura di confronti appaiati tra più alternative. Tale struttura si traduce in un modello probabilistico prima, e statistico poi, i cui parametri sono immediatamente e facilmente interpretabili in termini di analisi delle preferenze.

Pur tuttavia è innegabile che il meccanismo dei confronti appaiati sia difficilmente giustificabile in situazioni nelle quali la graduatoria esprime l'ordine di preferenze tra  $m$  alternative, con  $m$  elevato. Infatti, il numero di confronti è pari a  $m(m-1)/2$ , per cui diventa sempre più difficilmente praticabile al crescere di  $m$ .

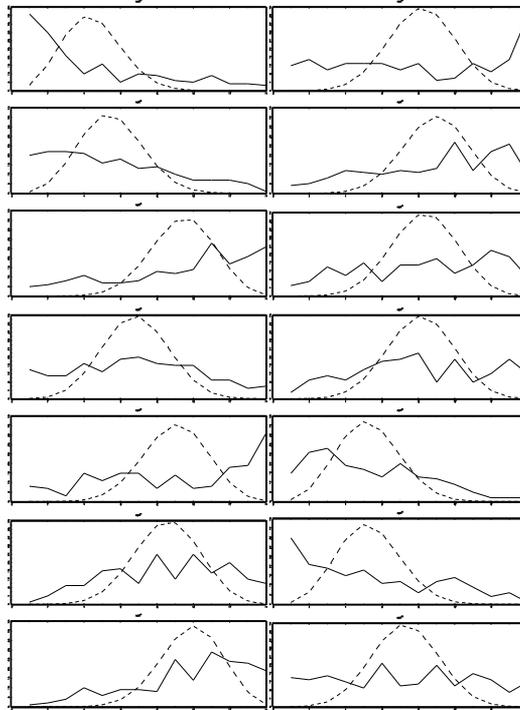
In tali situazioni appare maggiormente plausibile un diverso meccanismo di elaborazione delle graduatorie. In particolare, è lecito assumere che il processo di formulazione di una graduatoria, avvenga individuando innanzitutto l'oggetto preferito tra  $m$ , al quale si attribuisce rango pari ad 1, poi l'oggetto preferito tra i rimanenti  $m-1$ , al quale va rango 2, e così via, sino all'ultimo oggetto, che evidentemente riceve rango pari a  $m$ .

Tale meccanismo è riconducibile ad un'estrazione senza ripetizione di palline da un'urna. In particolare, per uno specifico oggetto  $j$ , data un'urna che contiene  $B_j$  palline bianche e  $m-1$  palline non bianche, consideriamo la prova consistente nell'estrarre senza ripetizione una pallina per volta dall'urna sino a che esca pallina bianca per la prima volta. La v.c.  $R_j$  è definita come il numero di estrazioni occorrenti affinché si verifichi pallina bianca per la prima volta. Essa costituisce un caso particolare della v.c. Ipergeometrica inversa (IGI),  $R_j \sim IGI(B_j, m)$ , ampiamente studiata in Guenther, 1975.

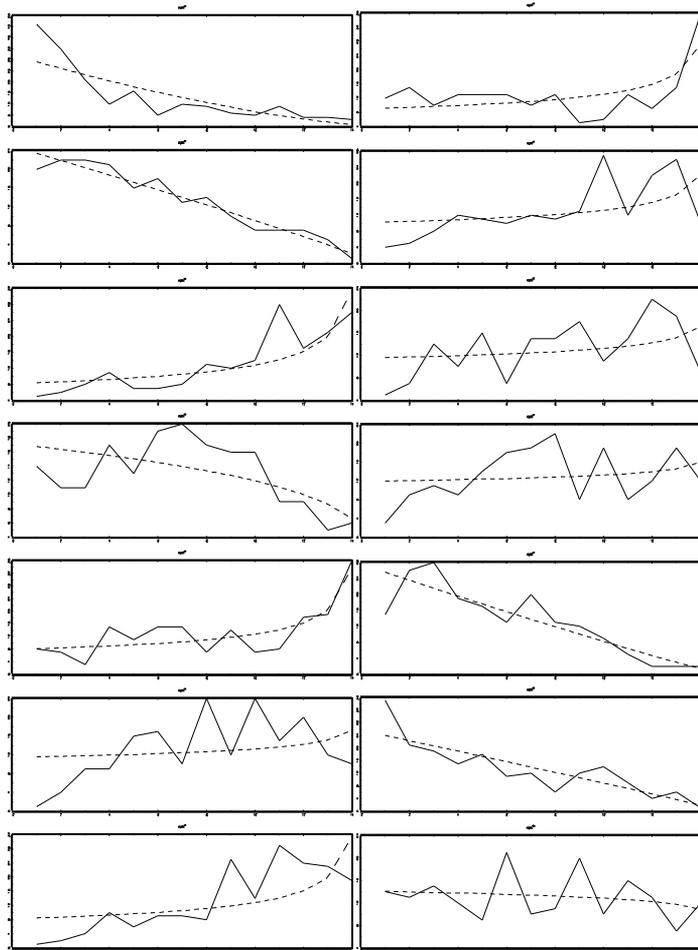
E' possibile (D'Elia, 1999) quindi considerare i ranghi osservati  $r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{nj}$  per uno specifico oggetto  $j$  come realizzazioni di una  $n$ -upla di v.c. Ipergeometriche inverse, indipendenti e identicamente distribuite, il cui parametro  $B_j$  è interpretabile come misura di preferenza per l'oggetto  $j$ . Sfruttando tale struttura probabilistica si perviene ad un modello lineare generalizzato per i ranghi (D'Elia, 2000), che presenta analogha flessibilità e immediatezza di interpretazione del modello dei confronti appaiati illustrato in questo lavoro.

La distribuzione di probabilità della v.c. Ipergeometrica inversa ha andamento monotono decrescente, costante, monotono crescente, a seconda che il parametro  $B_j$  sia maggiore, uguale o minore a 1. In termini di bontà di adattamento alle distribuzioni osservate dei ranghi, questo aspetto può sembrare un limite di tale modello rispetto alla flessibilità dello schema dei confronti appaiati basato sulla v.c. Binomiale traslata.

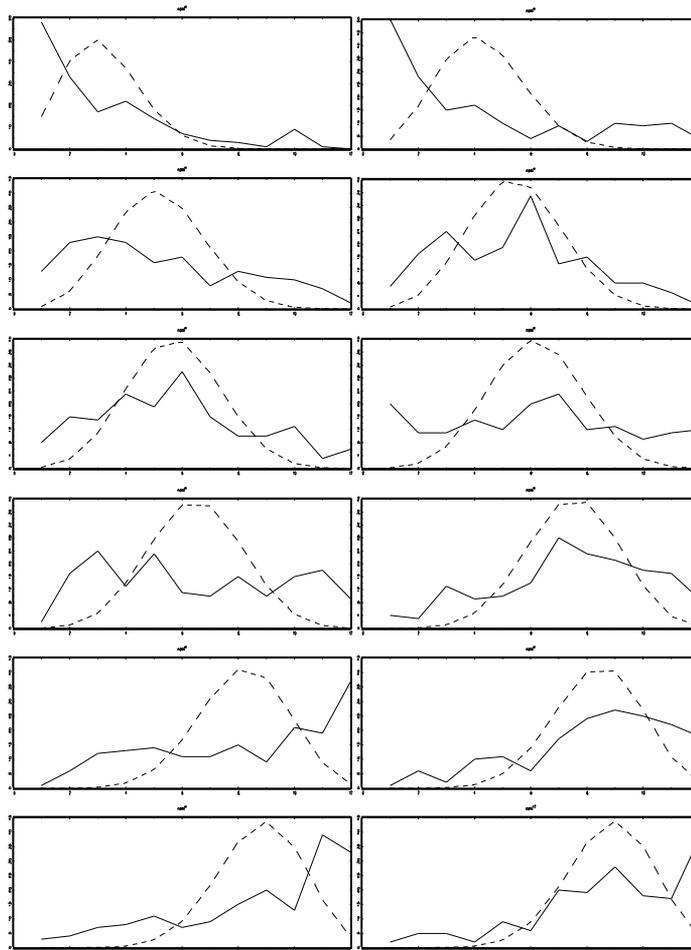
In realtà l'evidenza empirica che ora presentiamo sembra negare tale limite. Nelle figure 2 e 3 è, infatti, illustrato l'adattamento dei due modelli probabilistici (Binomiale traslata e Ipergeometrica inversa) ai ranghi osservati nell'analisi delle preferenze professionali (paragrafo 6) e ai ranghi rilevati in una diversa indagine sulle preferenze verso 12 colori (D'Elia, 2000).



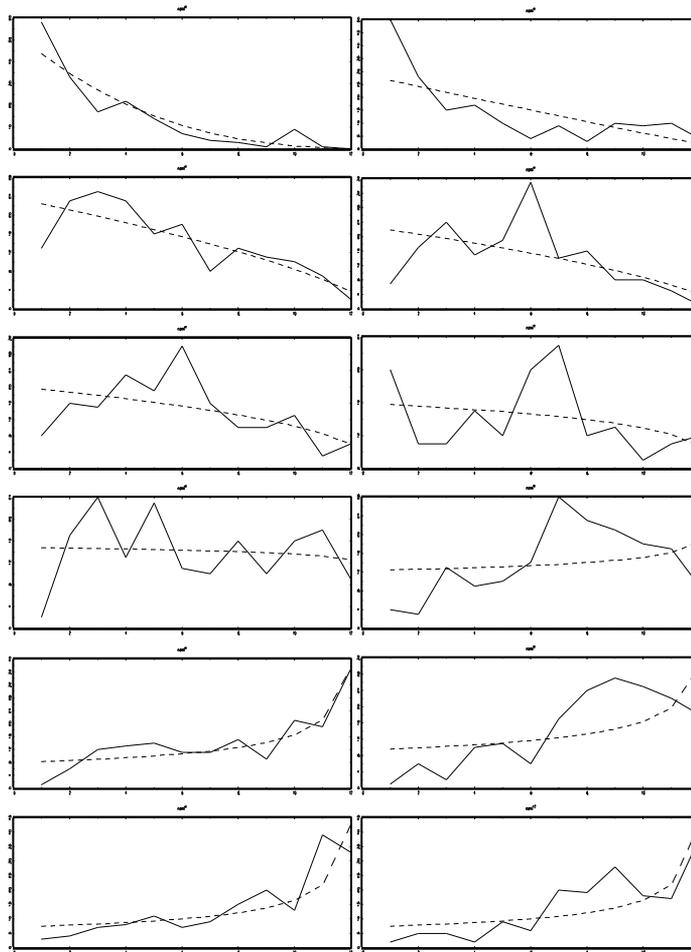
*Figura 2a. Adattamento della v.c. Binomiale traslata alle distribuzioni osservate dei ranghi per le professioni*



*Figura 2b. Adattamento della v.c. Ipergeometrica inversa alle distribuzioni osservate dei ranghi per le professioni*



*Figura 3a. Adattamento della v.c. Binomiale traslata alle distribuzioni osservate dei ranghi per i colori*



*Figura 3b. Adattamento della v.c. Ipergeometrica inversa alle distribuzioni osservate dei ranghi per i colori*

Pur trattandosi di popolazioni distinte e di fenomeni profondamente differenti, le figure mettono in luce che le distribuzioni dei ranghi sono sostanzialmente di tre tipologie: decrescente, costante, crescente. Ne consegue che il modello basato sulla v.c. Ipergeometrica Inversa mostra un migliore adattamento alle distribuzioni osservate. Ciò probabilmente è dovuto all'inadeguatezza del meccanismo dei confronti appaiati a rappresentare il processo di elaborazione di una graduatoria quando  $m$  è elevato (Figura 2:  $m=14$ ; Figura 3:  $m=12$ ).

### **8. Ulteriori sviluppi**

L'evidenza prodotta nel paragrafo 7 ha messo in luce che esistono situazioni nelle quali il modello derivante dallo schema dei confronti appaiati non risulta adeguato a rappresentare la realtà delle preferenze osservate.

D'altra parte non si può negare che il modello illustrato in questo lavoro abbia una sua plausibilità in situazioni nelle quali il numero di alternative da mettere in graduatoria non è elevato. In particolare esso può risultare uno schema adeguato a rappresentare la distribuzione dei ranghi assegnati ad un oggetto  $j$ , quando per esso non sono presenti atteggiamenti di forte gradimento o forte repulsione: in tal caso, infatti, il modello probabilistico della v.c. Binomiale traslata dovrebbe ben adattarsi all'addensamento della massa di probabilità in corrispondenza di valori intermedi dei ranghi.

Inoltre, gli sviluppi dei paragrafi precedenti hanno mostrato che il modello basato sui confronti appaiati risulta coerente in termini probabilistico-inferenziali ed utile in quanto modello lineare generalizzato per l'analisi delle graduatorie.

Emerge quindi la necessità di valutare la possibilità di pervenire ad un unico schema che coniughi la diversa flessibilità dei due modelli nel rappresentare i processi di elaborazione di graduatorie di preferenze.

A tale proposito notiamo che la modellistica dei confronti appaiati può essere ricondotta ad uno schema più generale, cui appartiene come caso particolare anche il modello per i ranghi basato sulla v.c. Ipergeometrica

inversa.

Infatti, si consideri la v.c.  $S_j$  (paragrafo 3), distribuita come una v.c. Binomiale di parametri  $(m - 1, \psi_j)$  e si assuma che il parametro  $\psi_j$  sia realizzazione di una v.c.  $\Psi_j$  distribuita come una v.c. Beta di parametri  $(1, B_j)$ ,  $B_j > 0$ . Allora la distribuzione marginale di  $S_j$  risulta (Guenther, 1975):

$$\begin{aligned} Pr(S_j = s) &= \binom{m-1}{s} \frac{B_j \Gamma(1+s) \Gamma(m-1+B_j-s)}{\Gamma(m+B_j)} = \\ &= \binom{m-1+B_j-s-1}{m-1-s} / \binom{m+B_j-1}{m-1}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Poiché per la (1)  $S_j = R_j - 1$ , si ha infine:

$$Pr(R_j = r) = \binom{m+B_j-r-1}{m-r} / \binom{m+B_j-1}{m-1}, \quad r = 1, 2, \dots, m$$

che è la distribuzione di probabilità di una v.c. Ipergeometrica inversa, con parametri  $(B_j, m)$ .

Ciò significa che i modelli per le graduatorie basati sulla v.c. Binomiale traslata e sulla v.c. Ipergeometrica inversa possono essere ricondotti ad un unico schema generatore, nel quale un ruolo determinante è svolto dalla distribuzione che si ipotizza per il *parametro di non gradimento*  $\psi_j$ , in base alle informazioni che si hanno sul fenomeno studiato.

## 9. Considerazioni finali

Numerosi sono i contesti nei quali l'analisi statistica delle graduatorie ordinate di preferenze, espresse da soggetti con caratteristiche differenti, risulta un utile strumento di indagine. Attraverso essa, infatti, è possibile valutare come il gradimento verso uno specifico oggetto vari al cambiare delle caratteristiche dei soggetti. Tale valutazione, evidentemente, può risultare preziosa ogni volta che le "politiche decisionali" sono, in qualche misura, connesse alle preferenze della popolazione di riferimento.

In funzione di tali obiettivi, è importante investire in ulteriori sviluppi dell'analisi modellistica delle preferenze.

Tra essi, nell'ottica di pervenire ad uno schema modellistico unitario, come proposto nel paragrafo precedente, segnaliamo la necessità di sviluppare l'analisi probabilistica al variare delle distribuzioni ipotizzate per  $\psi_j$ .

Parallelamente, sarà importante sviluppare forme di modellistica multivariata, che consentano di rappresentare e quindi analizzare l'intera graduatoria espressa da ogni soggetto, e non solo la distribuzione dei ranghi assegnata a ciascuno specifico oggetto.

*Ringraziamenti:* Il lavoro ha beneficiato di contributi derivanti da progetti di ricerca CNR, MURST, di Ateneo e di interesse nazionale, afferenti al Dipartimento di Scienze Statistiche dell'Università di Napoli Federico II.

### ***Riferimenti bibliografici***

Agresti A. (1977) Considerations in Measuring Partial Association for Ordinal Categorical Data, *Journal of the American Statistical Association*, 72, 37-45.

Agresti A. (1984) *Analysis of Ordinal Categorical Data*, John Wiley, New York.

Anderson J. A. (1984) Regression and Ordered Categorical Variables, *Journal of the Royal Statistical Society B*, 46, 1-30.

Basu S., Basu A. e Raychaudhuri A. (1999) Measuring Agreement between two raters for ordinal response: a model-based approach, *The Statistician*, 48, 339-348.

Bradley R. A. (1976) Science, Statistics, and Paired Comparisons, (with discussion), *Biometrics*, 32, 213-239.

Bradlow E. T. e Zaslavsky A. M. (1999) A Hierarchical Latent Vari-

able Model for Ordinal Data from a Customer Satisfaction Survey with “No Answer” Responses, *Journal of the American Statistical Association*, 94, 43-52.

Critchlow D. E. e Verducci J. S. (1992) Detecting a Trend in Paired rankings, *Applied Statistics*, 41, 17-29.

Crouchley R. (1995) A Random-Effects Model for Ordered Categorical Data, *Journal of the American Statistical Association*, 90, 489-498.

Daniels H. E. (1950) *Rank Correlation and Population Models, (with discussion)*, *Journal of the Royal Statistical Society B*, 12 171-191.

Davidson R. R. e Bradley R. A. (1969) Multivariate paired comparisons: The extension of a univariate model and associated estimation and test procedures, *Biometrika*, 56, 81-95.

D’Elia A. (1999) A Proposal for Ranks Statistical Modelling, in *Statistical Modelling*, (Friedl, H., Berghold, A., Kauermann, G. eds.), Graz - Austria, 468-471.

D’Elia A. (2000) Un modello lineare generalizzato per i ranghi: aspetti statistici, problemi computazionali, e verifiche empiriche, *Italian Journal of Applied Statistics*, 12, in stampa.

Dittrich R., Hatzinger R. e Katzenbeisser W. (1998) Modelling the effect of subject-specific covariates in paired comparison studies with an application to university rankings, *Applied Statistics*, 47, 511-525.

Feigin P. D. e Cohen A. (1978) On a Model for Concordance between Judges, *Journal of the Royal Statistical Society B*, 40, 203-213.

Fligner M. A. e Verducci J. S. (1988) Multistage Ranking Models, *Journal of the American Statistical Association*, 83, 892-901.

Gibbons J. D., Chakraborti S. (1992) *Nonparametrical Statistical Inference*, 3<sup>a</sup>ed., Dekker, New York.

Guenther W. C. (1975) The Inverse Hypergeometric - a Useful Model, *Statistica Neerlandica*, 29, 129-144.

Kendall M. G., Gibbons J. D. (1990) *Rank Correlation Methods*, 5<sup>a</sup>ed., Oxford University Press, New York.

Mallows C. L. (1957) Non-Null Ranking Models. I, *Biometrika*, 44, 114-130.

Marden J. I. (1992) Use of Nested Orthogonal Contrasts in Analyzing Rank Data, *Journal of the American Statistical Association*, 87, 307-318.

Marden J.I. (1995) *Analyzing and Modeling Rank Data*, Chapman & Hall, London.

McCullagh P. (1980) Regression Models for Ordinal Data, *Journal of the Royal Statistical Society B*, 42, 109-127.

McCullagh P., Nelder J. A. (1989) *Generalized Linear Models*, 2<sup>a</sup> ed., Chapman & Hall, London.

Nelder J. A., Wedderburn R. W. M. (1972) Generalized Linear Models, *Journal of the Royal Statistical Society A*, 135, 370-384.

Stern H. (1990) Models for Distributions on Permutations, *Journal of the American Statistical Association*, 85, 558-564.

Tanner M. A. e Young M. A. (1985) Modeling Agreement Among Raters, *Journal of the American Statistical Association*, 80, 175-180.

Taplin R. H. (1997) The Statistical Analysis of Preference Data, *Applied Statistics*, 46, 49-512.