

Il Local Polynomial Bootstrap per l'analisi nonparametrica della volatilità

Maria Lucia Parrella

Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche, Università di Salerno

E-mail: mparrella@unisa.it

Summary: This paper deals with the estimation of the volatility function for financial time series. We set up the problem in a nonparametric framework, by considering the local polynomial estimator of the volatility function for stationary time series. We propose a bootstrap method for the derivation of the confidence bands for such estimator. We prove the consistency of the method, and then apply it to estimate the volatility function of several financial time series and to derive their relative confidence bands.

Keywords: Local polynomial regression, Local polynomial bootstrap, Volatility function.

1. Introduzione

Dato un processo stazionario in senso stretto, si consideri la classe dei modelli autoregressivi con errori eteroschedastici:

$$X_t = m(X_{t-i_1}, \dots, X_{t-i_q}) + s(X_{t-i_1}, \dots, X_{t-i_q})\epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (1)$$

in cui $\epsilon_t \sim i.i.d(0, 1)$ e indipendenti da X_t ; $m(\cdot)$ ed $s(\cdot)$ sono funzioni reali a valori rispettivamente in \mathbb{R} ed \mathbb{R}_+ e gli indici i_1, \dots, i_q sono interi positivi che individuano i q ritardi del modello. Al variare delle assunzioni fatte sulla forma funzionale di $m(\cdot)$ ed $s(\cdot)$, possono essere derivati modelli parametrici particolari, frequentemente utilizzati in letteratura soprattutto in un contesto di dati finanziari, quali i modelli ARCH, GARCH, EGARCH, DTARCH.

Una delle tendenze recenti degli studiosi è quella di abbandonare modelli parametrici prestabiliti e di lasciare che siano i dati stessi ad individuare in qualche modo la forma funzionale del modello, in base a prefissati criteri di ottimo. Ancora più spesso, la *stima nonparametrica* ottenuta è complementare a un'analisi di tipo parametrico, fungendo ad esempio da analisi preliminare per la scelta del modello parametrico più opportuno. In questi casi l'accento si sposta sul momento inferenziale della stima nonparametrica, ovvero quello della costruzione di test delle ipotesi affidabili per la verifica della 'vicinanza' della curva stimata ad una particolare forma funzionale.

La prima versione non parametrica della (1) è dovuta a Gouriéroux e Monfort (1992), con il loro modello QTARCH. In altri modelli non parametrici, si utilizza per la stima di $m(\cdot)$ ed $s(\cdot)$ stimatori kernel (Robinson, 1983; Collomb e Härdle, 1986; Marsry e Tjostheim, 1995) o più in generale i polinomi locali (Masry e Fan, 1997; Härdle e Tsybakov, 1997).

Al fine di considerare un contesto generale, questo lavoro si pone nel caso nonparametrico analizzato da Härdle e Tsybakov. Dato lo stimatore dei polinomi locali della varianza condizionale (che contiene come caso particolare lo stimatore kernel Nadaraya-Watson), si propone un metodo bootstrap per la costruzione delle bande di confidenza di tale stimatore, che risulta essere consistente e di più semplice utilizzo rispetto al metodo asintotico classico. Nel prossimo paragrafo viene descritto brevemente lo stimatore, quindi viene presentata nel terzo paragrafo la procedura bootstrap proposta per la costruzione delle bande di confidenza. Nel quarto paragrafo l'approccio proposto viene valutato su una serie simulata, e utilizzato per la stima della volatilità e delle relative bande di confidenza su alcune serie finanziarie di particolare interesse. Il paragrafo finale contiene alcune osservazioni conclusive, mentre in appendice viene data la dimostrazione di consistenza del metodo proposto.

2. Stima della funzione di volatilità

Data una particolare realizzazione di un processo stocastico stazionario del tipo (1), la stima dei momenti condizionali rappresenta una fa-

se fondamentale nell'analisi delle proprietà statistiche del processo. In particolare, legato al momento secondo è la varianza condizionale del processo

$$v(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(X_t^2 | X_{t-i_1}, \dots, X_{t-i_q}) - [\mathbb{E}(X_t | X_{t-i_1}, \dots, X_{t-i_q})]^2, \quad (2)$$

anche nota come *funzione di volatilità*, che risulta di particolare rilievo soprattutto per l'analisi di dati finanziari. Molti strumenti di ingegneria finanziaria, come il modello Black-Scholes e sue varianti per l'analisi dei prezzi delle options, o altri strumenti di analisi tecnica per le gestioni del portafoglio, si fondano sull'analisi della volatilità del mercato finanziario.

Härdle e Tsybakov (1997) propongono uno stimatore nonparametrico per la stima della funzione di volatilità basato sull'utilizzo dei polinomi locali. Si consideri la generica funzione

$$g(x; \phi) = \mathbb{E}\{\phi(X_{t+1}) | X_t = x\}, \quad (3)$$

dove ϕ rappresenta una funzione di Borel a valori reali. Per semplicità, si fa l'ipotesi che nel modello entri soltanto il ritardo a lag uno, ma il problema può essere generalizzato al caso riportato nella (2). Osservata la serie storica X_1, \dots, X_n , la funzione che meglio approssima localmente la (3), secondo il criterio dei minimi quadrati, è data da

$$\hat{g}_h(x; \phi) = \mathbf{e}_1^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h(x; \phi), \quad (4)$$

in cui $\mathbf{e}_1^T = (1, 0, \dots, 0)$ è un vettore di lunghezza $p + 1$ avente un valore unitario in prima posizione, e $\hat{\boldsymbol{\beta}}_h(x; \phi)$ è un vettore di coefficienti β_j soluzione del problema

$$\arg \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}} \sum_{t=1}^{n-1} \left[\phi(X_{t+1}) - \sum_{j=0}^p \beta_j \left(\frac{X_t - x}{h_n} \right)^j \right]^2 K \left(\frac{X_t - x}{h_n} \right). \quad (5)$$

L'idea di fondo è quella di approssimare localmente la funzione $g(x; \phi)$ attraverso un polinomio di grado p , ispirandosi alla logica dello sviluppo in serie di Taylor. La funzione kernel $K(\cdot)$ è in genere una funzione di densità a supporto limitato che attribuisce pesi via via minori alle osservazioni che si allontanano dal punto di stima x . Il criterio di 'vicinanza'

viene fissato dal parametro bandwidth h_n (finestra del kernel), che è funzione della dimensione campionaria n . D'ora in poi, per chiarezza di notazione, non si farà sempre esplicito riferimento a questa dipendenza del parametro bandwidth da n . A questo punto, lo stimatore $\hat{v}_h(x)$ della (2) considerato è definito come

$$\hat{v}_h(x) = \hat{g}_h(x; \phi_1) - \{\hat{g}_h(x; \phi_2)\}^2, \quad (6)$$

in cui $\phi_1(y) = y^2$ e $\phi_2(y) = y$. Questo stimatore rappresenta in pratica una generalizzazione dello stimatore kernel di tipo Nadaraya-Watson, comunemente usato per la stima nonparametrica di una funzione, ma risulta avere diversi vantaggi rispetto a quest'ultimo. Tra questi vi sono la riduzione della distorsione dello stimatore sia all'interno che agli estremi del supporto della funzione e l'adattamento della stima a diversi contesti di dati osservati, come ad esempio la stima delle derivate della funzione (Fan e Gijbels, 1995; Masry e Tjostheim, 1995).

3. Derivazione delle bande di confidenza con il Local Polynomial Bootstrap (LPB)

Si elencano qui di seguito le ipotesi di base sulle quali poggiano il teorema sulla distribuzione asintotica della statistica riportata nella (6) ed il teorema sulla consistenza del metodo LPB che sarà esposto più avanti in questo paragrafo. Tali assunzioni vengono fatte

Ipotesi (A) (processo stocastico)

- A1) il processo stocastico $\{X_t\}$ è stazionario e tale che $\mathbb{E}|X_t|^\delta < \infty$ per $\delta \geq 8$;
- A2) $\mathbb{E}(\epsilon_t^2) = 1$, $\mathbb{E}(\epsilon_t) = \mathbb{E}(\epsilon_t^3) = 0$ e $[\mathbb{E}(\epsilon_t^4) - 1] < \infty$;
- A3) $f_{X_t}(u) < \infty$ ed $f_{X_t, X_{t+l}}(u, v) < \infty$ per u, v appartenenti a un intorno di x , e per ogni $l \geq 1$, dove $f_{X_t}(\cdot)$ e $f_{X_t, X_{t+l}}(\cdot, \cdot)$ denotano, rispettivamente, la densità di probabilità di X_t e di (X_t, X_{t+l}) ;
- A4) esistono e sono limitate le densità condizionali $f_{X_t|X_{t+1}}(X_t|X_{t+1})$ ed $f_{X_t X_{t+l}|X_{t+1}, X_{t+l+1}}(u, v|y_1, y_2)$;

- A5) la funzione di ripartizione condizionale $F_{X_{t+1}|X_t}(y|v)$ di $\phi(X_{t+1})$ è continua nel punto $v = x$;
- A6) la funzione di densità di probabilità $f_{X_t}(\cdot)$ è continua nell'insieme compatto $I_h(x) = [x - h_n; x + h_n]$ ed è tale che $\inf_{x \in I_h(x)} f_{X_t}(x) > 0$;
- A7) il processo $\{X_t\}$ è β -mixing dell'ordine $O(\rho^n)$ per $0 \leq \rho < 1$;

Ipotesi (B) (derivata di ordine $p + 1$)

- B1) le derivate di ordine $p + 1$ delle funzioni $m(\cdot)$ ed $s(\cdot)$ esistono, sono limitate e uniformemente continue su \mathbb{R} . Inoltre si assume che, per $k = p + 1$,

$$|m^{(k)}(u) - m^{(k)}(v)| \leq C |u - v|, \quad |s^{(k)}(u) - s^{(k)}(v)| \leq C |u - v|;$$

Ipotesi (C) (funzione kernel)

- C1) la funzione kernel $K(\cdot)$ è una funzione di densità limitata definita sul supporto compatto $[-1, 1]$, ed è tale che per ogni $0 \leq j \leq 2p + 1$ sia $|u^j K(u) - v^j K(v)| \leq C_4 |u - v|$;

Ipotesi (D) (parametro bandwidth h_n)

- D1) la finestra del kernel h_n è tale che $h_n = O(n^{-1/(2p+3)})$;

Teorema 1 *Sotto le ipotesi A-D, si dimostra che*

$$\sqrt{nh_n} \{\hat{v}_h(x) - v(x)\} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\{b_v(x), \sigma_v^2(x)\} \quad (7)$$

per $n \rightarrow \infty$, dove

$$b_v(x) = \frac{\sqrt{nh_n^{2p+3}}}{(p+1)!} [g^{(p+1)}(x; \phi_2) - 2m(x)m^{(p+1)}(x)] \mathbf{e}_1^T \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\mu}$$

$$\sigma_v^2(x) = \frac{s^4(x)}{f_{X_t}(x)} [\mathbb{E}(\epsilon_t^4) - 1] \mathbf{e}_1^T \mathbf{S}^{-1} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}_1,$$

ed in cui le matrici utilizzate sono definite nel seguente modo

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mu_0 & \dots & \mu_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_p & \dots & \mu_{2p} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \nu_0 & \dots & \nu_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_p & \dots & \nu_{2p} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{p+1} \\ \vdots \\ \mu_{2p+1} \end{pmatrix}$$

$$\mu_j = \int_{-\infty}^{+\infty} u^j K(u) du \quad \nu_j = \int_{-\infty}^{+\infty} u^j K^2(u) du.$$

Dim.: Si veda Härdle e Tsybakov (1997).

In base alla (7), è quindi possibile costruire intorno alla stima $\hat{v}_h(x)$ le bande di confidenza al livello nominale $(1 - \alpha)$, per poter fare inferenza sul valore vero $v(x)$, a costo però di dover in qualche modo stimare le quantità non note da cui dipende la distribuzione asintotica: $g^{(p+1)}(x; \phi_2)$, $m^{(p+1)}(x)$, $s^4(x)$, $m(x)$, $\mathbb{E}(\epsilon_t^4)$ ed $f_{X_t}(x)$. Le prime due quantità rappresentano le derivate di ordine $p+1$ delle funzioni $g(x; \phi_2)$ ed $m(x)$, mentre l'ultima quantità si riferisce alla funzione di densità di X_t . Non è semplice stimare queste quantità, e certamente la loro stima aggiunge un ulteriore fonte di variabilità nella individuazione della distribuzione asintotica.

In via alternativa, qui si propone di ricorrere al metodo del Local Polynomial Bootstrap (LPB) per derivare empiricamente le bande di confidenza della curva $v(x)$, senza dover ricorrere alla stima delle quantità sopra elencate. Il metodo LPB prevede che la distribuzione campionaria dello stimatore venga approssimata attraverso una procedura di ricampionamento in cui la serie bootstrap replicata viene costruita sulla base di una stima della funzione di ripartizione condizionale. Per una descrizione dettagliata del metodo si veda Parrella (2003). Molto schematicamente, i passi da seguire sono i seguenti:

1. si stima la funzione di ripartizione condizionale $F_{X_t|X_{t-1}}(y|x)$ mediante stimatore nonparametrico dei polinomi locali

$$\tilde{F}_{b, X_t|X_{t-1}}(y|x) = \hat{g}_b(x; \phi) \quad \forall t = 2, \dots, n,$$

dove $\phi(z) = \mathbb{I}_{(-\infty, y]}(z)$ e \mathbb{I} è la funzione indicatrice. Si noti, inoltre, che per la stima \tilde{F} viene utilizzata una seconda finestra b_n , detta *finestra di ricampionamento*, tale che $b_n > h_n$;

2. le osservazioni bootstrap vengono generate nel seguente modo

$$X_t^* \sim \tilde{F}_{b, X_t | X_{t-1}}(y|x) \quad \forall t = 2, \dots, n,$$

e in modo tale che X_t^* sia indipendente da X_s^* per $t \neq s$;

3. la replica bootstrap $\hat{v}_h^*(x)$ si ottiene stimando la quantità:

$$\hat{v}_h^*(x) = \hat{g}_h^*(x; \phi_1) - \{\hat{g}_h^*(x; \phi_2)\}^2,$$

in cui $\hat{g}_h^*(x; \phi) = \mathbf{e}_1^T \hat{\beta}_h^*(x; \phi)$, e $\hat{\beta}_h^*(x; \phi)$ è la soluzione del problema di minimizzazione (5), in cui $\phi(X_{t+1})$ viene sostituito da $\phi(X_{t+1}^*)$;

4. si ripetono i passi precedenti B volte (con $B \geq 1000$) e si approssima la distribuzione della (7) mediante

$$\sqrt{nh_n} [\hat{v}_h^*(x) - v^*(x)] | X_1, \dots, X_n, \quad (8)$$

dove si è posto $v^*(x) = \hat{v}_b(x)$.

Per dimostrare la consistenza del metodo, è necessario aggiungere al gruppo D le assunzioni sul parametro b_n .

Ipotesi (D') (parametro bandwidth h_n)

D1) la finestra del kernel h_n è tale che $h_n = O(n^{-1/(2p+3)})$;

D2) la finestra di ricampionamento b_n è tale che $b_n = O(n^{-1/(2p+5)})$.

Teorema 2 Sotto le ipotesi A-D', per $n \rightarrow \infty$, e per ogni punto di continuità delle funzioni $f_{X_t}(\cdot)$ e $\sigma_v^2(x)$, per ogni compatto $\mathbb{C} \in \mathbb{R}$ si verifica

$$\sup_{x \in \mathbb{C}} |\mathcal{L}_n(x) - \mathcal{L}_n^*(x)| \xrightarrow{p} 0,$$

in cui $\mathcal{L}_n(x)$ indica la distribuzione della statistica $\sqrt{nh_n} [\hat{v}_h(x) - v(x)]$ ed $\mathcal{L}_n^*(x)$ la distribuzione di $\sqrt{nh_n} [\hat{v}_h^*(x) - v^*(x)] | X_1, \dots, X_n$.

Dim.: si veda l'appendice.

Questo teorema garantisce quindi che la distribuzione indicata nella (8) tenda alla distribuzione limite indicata nella (7) asintoticamente. Uno studio di simulazioni presentato in La Rocca e Parrella (2003) mostra che, per n finito, la distribuzione campionaria approssimata col metodo LPB ($\sqrt{nh_n} [\hat{v}_h^*(x) - v^*(x)] | X_1, \dots, X_n$) sia in genere più vicina alla distribuzione reale della statistica di interesse ($\sqrt{nh_n} [\hat{v}_h(x) - v(x)]$) di quanto non lo sia la distribuzione asintotica individuata col metodo classico ($\mathcal{N}\{b_v(x), \sigma_v^2(x)\}$). Questo si traduce in termini di maggiore accuratezza del metodo bootstrap rispetto al metodo asintotico. Un'altra interessante caratteristica del metodo emersa dallo studio effettuato è la limitata sensibilità delle stime al variare del parametro b_n , che risulta quindi essere un parametro di minor impatto sui risultati ottenuti mediante il metodo di ricampionamento rispetto al parametro bandwidth h_n associato allo stimatore.

4. Alcuni risultati di simulazioni e applicazioni a serie finanziarie reali

Per valutare la procedura di stima proposta, essa è stata applicata a una serie storica simulata da un processo noto soddisfacente le ipotesi elencate in precedenza. L'analisi è stata condotta in ambiente S-plus. Si considera, per semplicità, l'esempio proposto in Härdle e Tsybakov (1997):

$$X_{t+1} = \frac{1}{1 + \exp(-X_t)} + [\varphi(X_t + 1.2) + 1.5\varphi(X_t - 1.2)] \epsilon_t, \quad (9)$$

dove le ϵ_t , per $t = 1, 2, \dots, n$, rappresentano variabili errore *i.i.d.* con distribuzione uniforme, e φ indica la funzione di ripartizione della normale standard. Sia per questa simulazione che per le applicazioni successive viene usata la funzione kernel di tipo Epanechnikov:

$$K(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & \text{per } |x| < 1 \\ 0 & \text{per } |x| \geq 1 \end{cases} .$$

Nella parte alta della figura 1, si riporta il grafico di una particolare realizzazione di lunghezza $n = 500$ del processo (9) e lo scatter plot di

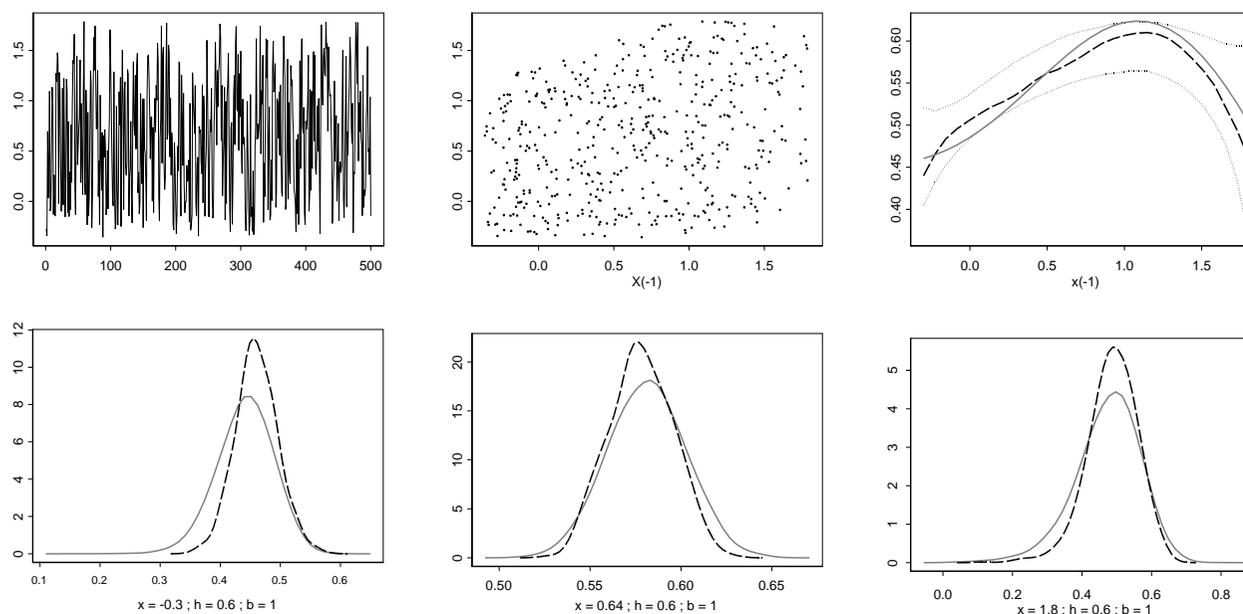


Figura 1: In alto sulla sinistra, una particolare realizzazione del processo (9); al centro, lo scatter plot di X_t rispetto a X_{t-1} per la serie osservata. A destra, la stima $\{\hat{v}_h(x)\}^{1/2}$ ottenuta sulla serie osservata, con le relative bande di confidenza al livello 90% ricavate mediante il metodo LPB. La linea continua rappresenta la funzione vera. In basso, la distribuzione campionaria vera (linea continua) e la sua approssimazione bootstrap, per tre diversi punti del supporto di $v(x)$.

X_t rispetto a X_{t-1} . Nella parte destra, vengono presentati i risultati ottenuti applicando sulla serie simulata la procedura di stima descritta nei paragrafi precedenti per ricavare la funzione stimata $\{\hat{v}_h(x)\}^{1/2}$, con le relative bande di confidenza bootstrap. La linea continua centrale rappresenta la stima di $\{v(x)\}^{1/2}$, ottenuta utilizzando come ampiezza del kernel $h_n = 0.6$. Le linee tratteggiate rappresentano le bande di confidenza al 90% ottenute mediante il metodo LPB con $b_n = 1$. Nella parte bassa della figura vengono riportate le curve di densità approssimate ottenute mediante il metodo LPB (curva tratteggiata), per tre diversi punti del supporto della funzione $v(x)$. Come si può notare, l'approssimazione della distribuzione campionaria ottenuta mediante questo metodo è soddisfacente già per $n = 500$: le curve continue rappresentano infatti la distribuzione campionaria vera approssimata mediante 10000 repliche Monte Carlo, mentre le curve tratteggiate delineano le rispettive approssimazioni ottenute mediante il metodo LPB. Si noti dallo scatter plot che due dei punti considerati sono punti di frontiera.

A conferma dei risultati asintotici enunciati dal teorema 2, quindi, il metodo LPB produce risultati attendibili, lungo tutto il supporto della funzione stimata, e l'approssimazione della distribuzione campionaria d'interesse, utile per la stima delle bande di confidenza, non ha richiesto la conoscenza di alcuna quantità all'infuori dei parametri bandwidth h_n e b_n .

Come applicazione su dati reali, sono stati analizzati i dati giornalieri relativi ad alcuni titoli del MibTel nel periodo che va dal 03 gennaio 2000 al 30 dicembre 2002, per un totale di 757 osservazioni. Sono state prese in considerazione le serie dei principali otto titoli scambiati nel periodo di riferimento, che possono quindi essere considerati come i più *rappresentativi* dell'andamento del MibTel. Nella tabella 1 vengono elencati i nominativi dei titoli considerati e, per ciascun anno di riferimento, la percentuale di capitalizzazione rispetto all'indice MIB30 ed al totale di borsa. Come si può notare, questi otto titoli rappresentano in totale circa la metà della capitalizzazione dell'intera borsa italiana.

Su ciascuna delle serie dei rendimenti, definiti come differenze logaritmiche dei prezzi, è stata stimata la funzione di volatilità mediante lo stimatore dei polinomi locali di grado uno e sono state ricavate le bande

Tabella 1. Tavola riepilogativa delle percentuali di capitalizzazione degli otto titoli considerati rispetto all'indice MIB30 ed al totale di borsa.

	% MIB30			% BORSA		
	2000	2001	2002	2000	2001	2002
ENI	9.19	12.75	16.92	7.02	9.79	13.04
TELECOM ITALIA	10.37	11.58	10.60	7.92	8.89	8.17
TIM	11.45	12.03	10.21	8.75	9.24	7.86
ENEL	8.42	8.65	8.37	6.43	6.64	6.45
GENERALI	8.76	9.01	6.90	6.70	6.92	5.32
UNICREDITO ITALIANO	4.62	5.12	6.66	3.53	3.93	5.13
INTESA BCI	4.26	3.74	3.31	3.26	2.87	2.55
SAN PAOLO IMI	4.13	3.94	2.52	3.16	3.02	1.94
totale	61.2	66.82	65.49	46.77	51.3	50.46

di confidenza al 90% mediante il metodo LPB qui proposto. L'obiettivo è quello di verificare se anche per queste serie si osserva il cosiddetto fenomeno 'smiling' riscontrato in genere per dati di questo tipo, ovvero di una forma ad U della funzione di volatilità delle serie finanziarie, e/o se ci siano delle peculiarità da segnalare.

Nella figura 2 sono riportati i grafici relativi ai prezzi di chiusura degli otto titoli considerati nel periodo di riferimento. Come si può notare, c'è una particolarità da evidenziare per i due titoli ENI ed ENEL: in data 29 maggio 2001 è stato deliberato una variazione del valore nominale delle azioni, ovvero è stato dimezzato il numero di azioni in circolazione, per cui il valore della singola azione è esattamente raddoppiato. Questo fa sì che nelle serie dei rendimenti, presenti nella figura 3, comparirebbe un valore eccezionale che inquinerebbe pesantemente le stime. Dal momento che tale valore è puramente fittizio, in quanto non deriva da un reale incremento di valore dell'azione ma da una semplice ed ininfluyente operazione contabile, si è provveduto ad eliminare i due valori eccezionali sostituendoli con la media dei dati adiacenti.

Per la stima delle curve di volatilità, è stato utilizzato anche in questo caso il kernel di tipo Epanechnikov. Per la scelta dell'ampiezza del kernel h_n , si è fissato tale valore ricorrendo a una procedura di selezione fornita in S-plus e basata su criteri di cross-validation. Il valore della finestra b_n è stato invece fissato empiricamente a circa $2h_n$. I risultati sono evidenziati nella figura 4.

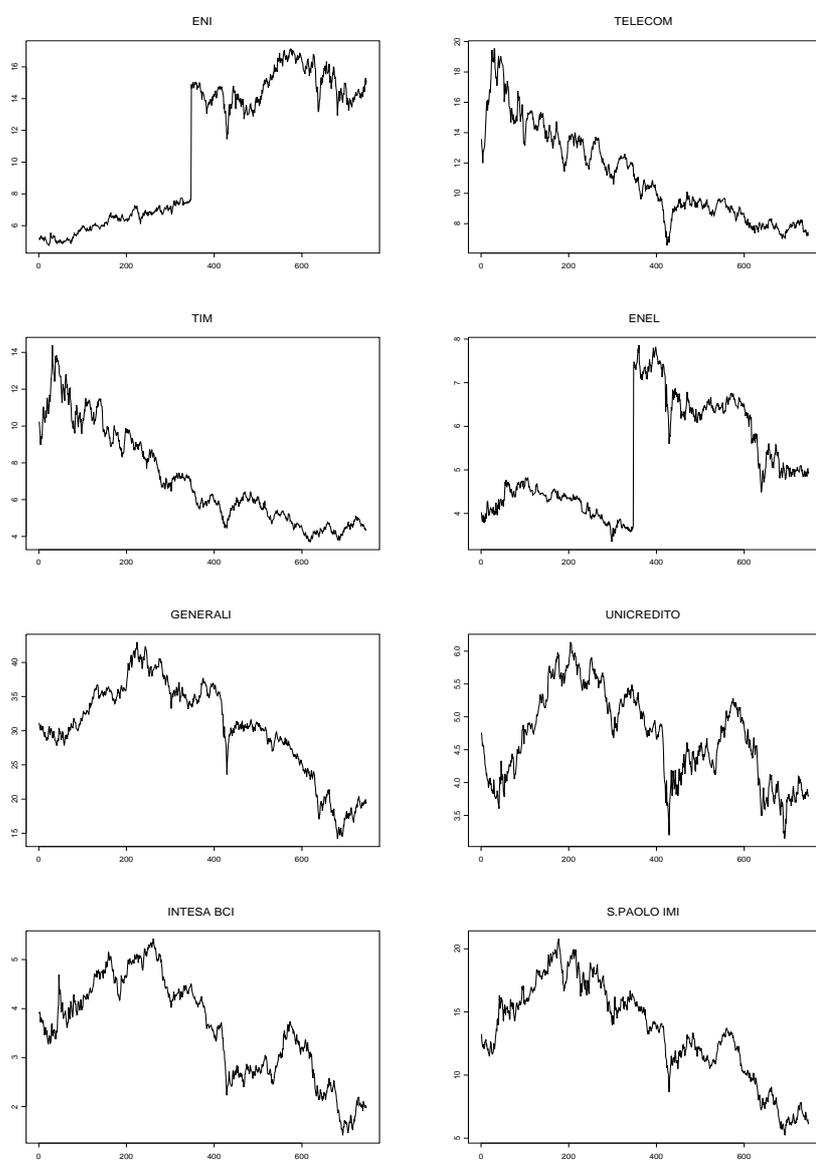


Figura 2: Grafici relativi ai prezzi di chiusura degli otto titoli indicati nella tabella 1, rilevati nel periodo 3 gennaio 2000 – 30 dicembre 2002.

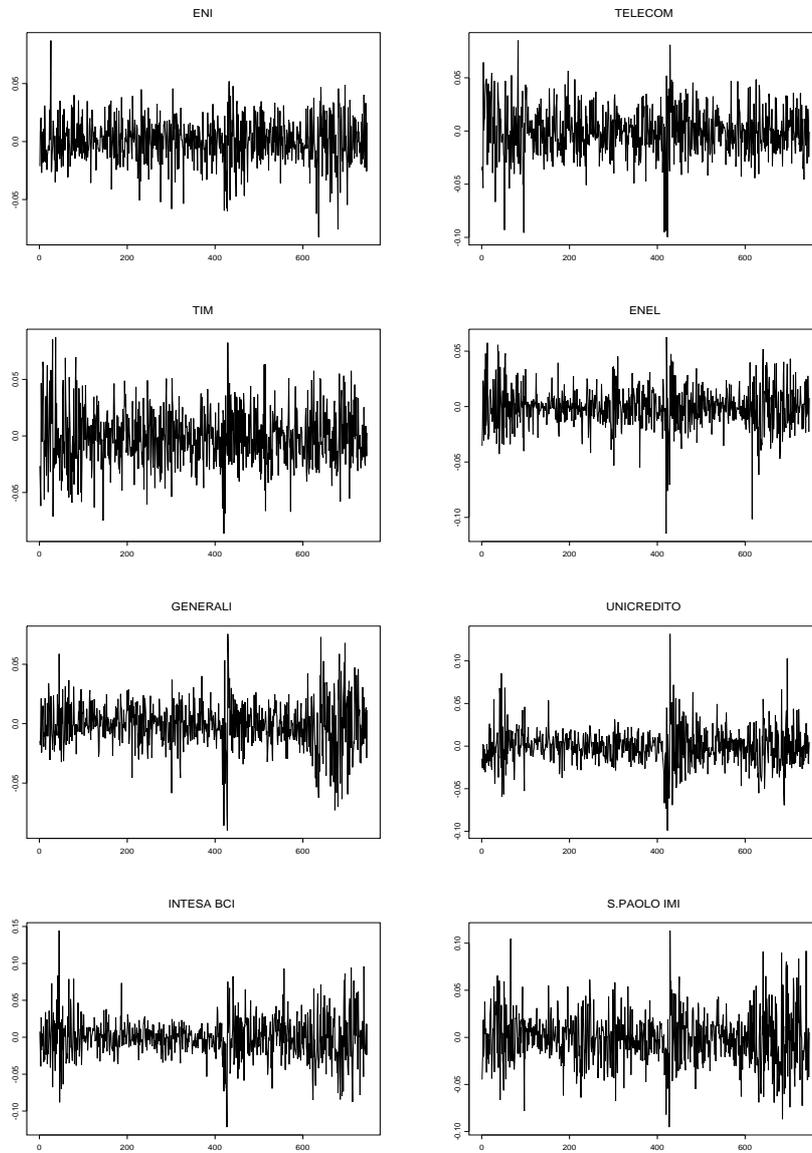


Figura 3: Grafici relativi ai rendimenti degli otto titoli indicati nella tabella 1.

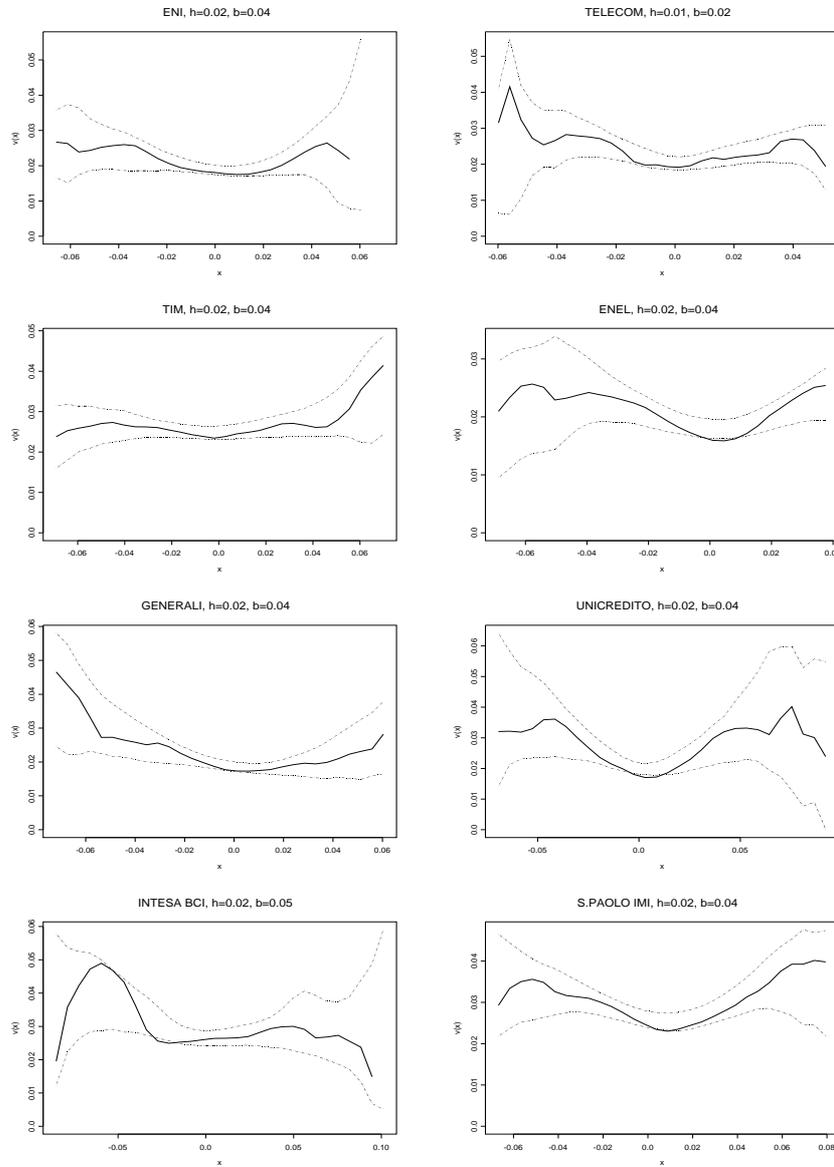


Figura 4: Stime delle funzioni $\{\hat{v}_h(x)\}^{1/2}$ relative agli otto titoli indicati nella tabella 1, insieme alla bande di confidenza al 90%.

Le stime ottenute e le bande di confidenza individuate confermano in generale l'andamento ad U della funzione. Le cadute che eventualmente si verificano ai bordi del supporto dipendono dalla scarsità dei dati osservati in quelle regioni. Osservando le stime ottenute e l'andamento delle bande di confidenza, per tutte le serie si verifica generalmente che ad aumenti o decrementi sostenuti del rendimento dell'azione corrisponda una volatilità del titolo più marcata. Per alcuni titoli, quali TELECOM e TIM, l'andamento appare poco marcato, e sembrerebbe compatibile con l'ipotesi di omoschedasticità o almeno di asimmetria della funzione di volatilità della serie, ipotesi che suggerirebbero l'utilizzo di particolari modelli parametrici che tengano conto di queste caratteristiche. È bene evidenziare che, per questo tipo di serie finanziarie, può essere utile ricorrere a modelli che includano anche i ritardi della volatilità, vale a dire considerare un modello nonparametrico di tipo GARCH.

6. Conclusioni

In questo lavoro si è proposto un metodo di ricampionamento per la derivazione della distribuzione campionaria dello stimatore dei polinomi locali della funzione di volatilità, per serie storiche stazionarie, eteroschedastiche e β -mixing. Dopo averne dimostrato la consistenza, il metodo proposto è stato utilizzato per studiare la variabilità di alcune serie finanziarie relative agli otto principali titoli azionari del MibTel scambiati nel periodo che va dal 03/01/2000 al 30/12/2002. Si è stimata la funzione di volatilità utilizzando lo stimatore dei polinomi locali proposto da Härdle e Tsybakov (1997), mentre per la costruzione delle bande di confidenza è stato proposto l'utilizzo di un particolare metodo bootstrap basato sulla stima locale della funzione di ripartizione condizionale. Questo metodo inferenziale si dimostra essere consistente e relativamente semplice da utilizzare, in quanto sostituisce alla difficoltà di stimare le quantità non note da cui dipende la distribuzione asintotica normale dello stimatore, l'onere di implementare un algoritmo computazionale che empiricamente approssima la distribuzione campionaria dello stimatore, senza necessità di stimare alcunché, ma solo calibrando opportunamente i due parame-

tri di smoothing h_n e b_n . In linea a risultati già ottenuti in altri contesti, anche questa particolare applicazione del metodo LPB offre risultati incoraggianti. Le linee guida della ricerca prevedono in futuro una più dettagliata analisi del rapporto tra i due parametri di smoothing h_n e b_n , e possibilmente l'individuazione di un algoritmo per la scelta automatica della finestra di ricampionamento b_n .

5. Appendice

Per dimostrare il teorema 2 è sufficiente dimostrare che la distribuzione bootstrap evidenziata nella (8) converge alla stessa distribuzione limite indicata nella (7). Per il teorema 3.2 in Härdle e Tsybakov, dobbiamo quindi dimostrare che, per $n \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{nh_n} [\hat{v}_h^*(x) - v^*(x)] \xrightarrow{d} \mathcal{N}\{b_v(x), \sigma_v^2(x)\}, \quad (10)$$

dove

$$\begin{aligned} b_v(x) &= \frac{\sqrt{nh_n^{2p+3}}}{(p+1)!} [g^{(p+1)}(x; \phi_2) - 2m(x)m^{(p+1)}(x)] \mathbf{e}_1^T \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ \sigma_v^2(x) &= \frac{s^4(x)}{f_{X_t}(x)} [\mathbb{E}(\epsilon_t^4) - 1] \mathbf{e}_1^T \mathbf{S}^{-1} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Ricorrendo al generico momento condizionale visto nella (3), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &[\hat{v}_h^*(x) - v^*(x)] = \\ &= \hat{g}_h^*(x; \phi_2) - [\hat{g}_h^*(x; \phi_1)]^2 - g^*(x; \phi_2) + [g^*(x; \phi_1)]^2 \\ &= \hat{g}_h^*(x; \phi_2) - g^*(x; \phi_2) - \\ &\quad \{[\hat{g}_h^*(x; \phi_1) + g^*(x; \phi_1)] [\hat{g}_h^*(x; \phi_1) - g^*(x; \phi_1)]\} \\ &= \hat{g}_h^*(x; \phi_2) - g^*(x; \phi_2) - \\ &\quad \{[2g^*(x; \phi_1) + \hat{g}_h^*(x; \phi_1) - g^*(x; \phi_1)] [\hat{g}_h^*(x; \phi_1) - g^*(x; \phi_1)]\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Poniamo per comodità

$$A_n = \sqrt{nh_n} [\hat{g}_h^*(x; \phi_2) - g^*(x; \phi_2)] \quad (12)$$

$$B_n = \sqrt{nh_n} [\hat{g}_h^*(x; \phi_1) - g^*(x; \phi_1)]. \quad (13)$$

Sotto le ipotesi fissate, abbiamo grazie al lemma 1 e al corollario 3 in Parrella (2003), per $n \rightarrow \infty$,

$$\hat{g}_h^*(x; \phi_1) - g^*(x; \phi_1) \xrightarrow{p} 0 \quad (14)$$

$$g^*(x; \phi_1) \xrightarrow{p} g(x; \phi_1). \quad (15)$$

Inoltre, in base al corollario 1 in Parrella (2003) il vettore $(A_n, B_n)'$ converge in distribuzione alla normale multivariata

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\{\mathbf{b}(x), \mathbf{\Sigma}(x)\}, \quad (16)$$

con

$$\mathbf{b}(x) = \frac{\sqrt{nh_n^{2p+3}} \mathbf{e}_1^T \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{(p+1)!} \begin{bmatrix} g^{(p+1)}(x; \phi_2) \\ g^{(p+1)}(x; \phi_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma}(x) = \frac{\mathbf{e}_1^T \mathbf{S}^{-1} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}_1}{f_{X_t}(x)} \begin{bmatrix} \sigma^2(x; \phi_2) & \sigma(x; \phi_1, \phi_2) \\ \sigma(x; \phi_1, \phi_2) & \sigma^2(x; \phi_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(x; \phi_2) &= \text{Var}\{\phi_2(X_{t+1})|X_t = x\} = \text{Var}\{X_{t+1}^2|X_t = x\} \\ &= 4m^2(x)s^2(x) + s^4(x) [\mathbb{E}(\epsilon_t^4) - 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(x; \phi_1) &= \text{Var}\{\phi_1(X_{t+1})|X_t = x\} = \text{Var}\{X_{t+1}|X_t = x\} \\ &= s^2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(x; \phi_1, \phi_2) &= \text{Cov}\{\phi_1(X_{t+1}), \phi_2(X_{t+1})|X_t = x\} \\ &= \text{Cov}\{X_{t+1}^2, X_{t+1}|X_t = x\} = 2m(x)s^2(x). \end{aligned}$$

In definitiva, tenendo conto delle (11), (12), (13) e (14), possiamo scrivere

$$\sqrt{nh_n} [\hat{v}_h^*(x) - v^*(x)] = A_n - [2g^*(x; \phi_1) + o_p(1)] B_n. \quad (17)$$

Data la (17), la tesi si dimostra applicando le regole di Slutsky e i risultati riportati nella (15) e nella (16), tenendo presente che $g(x; \phi_1) = m(x)$ e che, per il meccanismo di Cramér-Wald, si ha

$$\underbrace{A_n}_{\downarrow d} - \underbrace{[2g^*(x; \phi_1) + o_p(1)]}_{\downarrow p} \underbrace{B_n}_{\downarrow d} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\{\mu_C, \sigma_C^2\},$$

$$\mathcal{N}\{\mu_A, \sigma_A^2\} \quad 2m(x) \quad \mathcal{N}\{\mu_B, \sigma_B^2\}$$

con $\mu_C = \mu_A - 2m\mu_B$ e $\sigma_C^2 = \sigma_A^2 + 4m^2(x)\sigma_B^2 - 4m(x)\sigma_{AB}$. \blacklozenge

Riferimenti Bibliografici

Collomb G., Härdle W. (1986), Strong Uniform Convergence Rates in Robust Nonparametric Time Series Analysis and Prediction: Kernel Regression Estimation from Dependent Observations, *Stochastic Processes and Applications*, 23, 77–89.

Fan J., Gijbels I. (1995), Data-Driven Bandwidth Selection in Local Polynomial Fitting: Variable Bandwidth and Spatial Adaptation, *Journal of the Royal Statistical Society, series B*, 57, 371–394.

Gouriéroux C., Monfort A. (1992), Qualitative Threshold ARCH Models, *Journal of Econometrics*, 52, 159–199.

Härdle W., Tsybakov, A. (1997), Local Polynomial Estimators of the Volatility Function in Nonparametric Autoregression, *Journal of Econometrics*, 81, 223–242.

La Rocca M., Parrella M.L. (2003), Bootstrapping Local Polynomial Regression, *Convegno S.CO. 4-6 settembre, Treviso*.

Masry E., Fan J. (1997), Local polynomial estimation of regression functions for mixing processes, *Scandinavian Journal of Statistics*, 24, 165–179.

Masry E., Tjøstheim D. (1995), Nonparametric Estimation and Identification of Nonlinear ARCH Time Series, *Econometric Theory*, 11, 258–289.

Parrella M.L. (2003), Il Local Polynomial Bootstrap per l'analisi di dati dipendenti, *Working Paper n.3133, DiSES, Università di Salerno*, Maggio 2003.

Robinson J.A. (1983), Bootstrap Confidence Intervals in Location-Scale Models with Progressive Censoring, *Technometrics*, 25, 179–187.