Quaderni di Statistica
Vol. 8, 2006

Il rischio di investimento per annualità vitalizie differite

Mariarosaria Coppola
Dipartimento di Scienze Statistiche
Università degli studi di Napoli Federico II
m.coppola@unina.it

Marilena Sibillo
Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche
Università degli studi di Salerno
msibillo@unisa.it

Summary: The solvency valuation of a deferred life annuity portfolio is considered supposing a stochastic scenario both for interest rate and mortality. The problem is studied basing the analysis on the risk sources affecting the portfolio under consideration. In particular, we evaluate the investment risk measuring its impact on the portfolio valuation. Finally, we illustrate a numerical example where we quantify the global riskiness of the reserve and the contribute of the investment risk for different ages at issue.

Keywords: Solvency valuation, Cash flow analysis, Investment risk.

1. Introduzione

I recenti sviluppi normativi della regolamentazione del mercato assicurativo pongono in evidenza la necessità di impostare l'analisi della solvibilità di una compagnia assicurativa in un approccio completo dal punto di vista dell'analisi integrata dei profili di rischio dell'attività assicurativa. L'importanza di tale approccio nelle valutazioni concernenti i portafogli vita è ampiamente riconosciuta dalla recente letteratura scientifica, nella quale sono proposti sia l'individuazione delle principali fonti di rischio, significativa ai fini della rischiosità globale di un portafoglio assicurativo ramo vita, sia gli strumenti necessari alla sua decomposizione nelle varie componenti: Frees (1990), Parker (1997), Coppola *et al.* (2000), Coppola *et al.* (2002).

In tal senso sono orientate le più recenti indicazioni delle istituzioni internazionali attive in campo assicurativo, che sostanziano le valutazioni di solvibilità in un approccio di fair valuation (si veda, ad esempio, IAIS (2002), (2003)).

La solvibilità va dunque studiata basando l'analisi sulle fonti di rischio; in particolare è necessario valutare i contributi delle singole componenti di rischio alla rischiosità globale del portafoglio e misurare l'impatto delle loro interazioni sul valore corrente del portafoglio di intermediazione, inteso come quantificazione dei debiti e quindi come riserva matematica.

In particolare, con riferimento a portafogli di annualità vitalizie, possiamo identificare due diverse componenti di rischio (si veda, ad esempio, Coppola *et al.,* 2000 e Coppola *et al.,* 2002): il *rischio di investimento,* connesso alla aleatorietà dei tassi di rendimento degli investimenti della compagnia ed *il rischio demografico.* In relazione a quest'ultimo è poi possibile individuare: *il rischio assicurativo*, derivante dagli scostamenti aleatori del numero effettivo dei decessi rispetto al numero previsto e *il rischio di longevità*, connesso al trend migliorativo della mortalità. Il rischio finanziario, come ampiamente mostrato in Coppola *et al.* (2000), rappresenta la componente con maggior peso sulla rischiosità globale di un portafoglio di annualità vitalizie.

Nel presente lavoro si considera il portafoglio come un sistema dinamico di flussi finanziari in entrata ed in uscita, in uno scenario stocastico sia per il tasso di interesse che per la mortalità e, in questo impianto di base, si pone come obiettivo l'espressione e la quantificazione del rischio di investimento.

Nel paragrafo 2 richiamiamo alcuni concetti fondamentali nell'analisi delle componenti di rischio di portafogli assicurativi ramo vita; nel paragrafo 3 calcoliamo la riserva matematica nel caso di un portafoglio di annualità vitalizie differite; nel paragrafo 4 la rischiosità globale della riserva viene decomposta nella componente di rischio assicurativo e di rischio di investimento; nel paragrafo 5, invece, si propone una esemplificazione numerica nella quale, per diverse età di ingresso in assicurazione, si quantifica il rischio globale della riserva ed il contributo del rischio di investimento, sulla base di una esemplificazione dello scenario stocastico in cui si suppone siano effettuate le valutazioni di portafoglio.

2. Alcune considerazioni sulle componenti di rischio di un portafoglio di annualità vitalizie

Con riferimento a portafogli di annualità vitalizie le due principali tipologie di rischio sono il rischio di investimento ed il rischio demografico.

Il rischio di investimento deriva dalla aleatorietà dei tassi di rendimento degli investimenti effettuati dall'Istituto rispetto ai tassi effettivi e presenta natura sistematica impattando su tutte le polizze nello stesso verso. È quindi cruciale individuare una misura che consenta di quantificare il rischio derivante da tale componente in modo da poter individuare opportune strategie di controllo. In virtù della sistematicità del rischio finanziario, le strategie di pooling fondate sulla diversificazione non sortiscono alcun effetto per la copertura di tale rischio, che riguarda sia l'attivo che il passivo del portafoglio assicurativo; a tal fine risultano più adeguate le tecniche di *asset and liability management (ALM).* Tra queste le più efficaci sono quelle dinamiche tra cui, ad esempio, l'*immunizzazione finanziaria*, basata sul matching delle variazioni di attività e passività, e *l'assicurazione di portafoglio* con cui si vuole garantire un determinato livello di protezione di un portafoglio assicurativo in un dato orizzonte temporale mediante l'utilizzo di opzioni.

Il rischio demografico va analizzato distinguendone la componente assicurativa e quella di longevità. La prima, derivando dalle oscillazioni del numero effettivo di decessi rispetto al numero previsto, rappresenta un rischio diversificabile che può essere controllato incrementando il numero di polizze in portafoglio. La seconda, invece, derivando dal miglioramento del trend della mortalità, rappresenta un rischio sistematico che può essere controllato mediante tavole di mortalità proiettate, cioè costruite sulla base di previsioni sull'andamento dei futuri tassi di mortalità (Marocco e Pitocco, 1998; Olivieri, 1998). Da ciò deriva una ulteriore fonte di rischio, rappresentata dalla aleatorietà della tavola di proiezione prescelta (Coppola *et al.,* 2002).

L'analisi delle tre componenti di rischio ha costituito il tema di numerosi contributi scientifici (si veda, per esempio, Coppola *et al*., 2000 e Coppola *et al*., 2002); in particolare, come risulta in Coppola *et al*. (2000), il portafoglio di 1000 polizze di annualità vitalizie immediate posticipate, di rata unitaria e su teste di uguale età $x=45$ *e* $x=65$ presenta varianza globale e rischio di investimento entrambi decrescenti passando l'età di ingresso dell'assicurato da 45 a 65. Riportiamo, dal lavoro citato, di seguito la tabella di valori.

Tabella 1 . Componenti di rischio di un portafoglio di 1000 polizze

Età di ingresso	65	45
Varianza totale	427.861	1.014.670
Rischio di investimento	420.882	1.012.360
Rischio assicurativo	6.979	2.310

L'andamento decrescente del rischio di investimento al crescere dell'età di stipulazione del contratto è dovuto alla diminuzione sia del tempo di esposizione al rischio di investimento che del numero di cash flow influenzati da tale fonte di rischio. Tale effetto predomina nettamente sul corrispondente andamento crescente del rischio assicurativo, come si vede chiaramente nella Tabella 2, qui riportata da Coppola *et al*. (2000). Si nota, inoltre, la trascurabilità del rischio assicurativo più evidente per età giovani, dovuta essenzialmente al fatto che si dispone, in questo caso, di un maggior numero di anni su cui si può realizzare la compensazione degli scarti accidentali.

Tabella 2. Componenti di rischio, in misura percentuale, di un portafoglio di 1000 polizze

Età di ingresso	65	45
Valore percentuale del rischio di investimento	98.3%	99.7%
Valore percentuale del rischio assicurativo	1.6%	0.2%

3. Portafoglio di annualità vitalizie differite: analisi di cash flow e la determinazione della riserva

Allo scopo di conferire generalità al modello proposto, considereremo il caso di un portafoglio di annualità vitalizie differite, riconducibile formalmente allo schema per annualità vitalizie immediate semplicemente ponendo pari a zero il periodo di differimento. La considerazione di tale portafoglio risulta interessante in particolare per le implicazioni teoriche in ambito previdenziale e pensionistico.

Consideriamo l'insieme delle attività e delle passività relative a un gruppo di annualità vitalizie differite. In particolare facciamo riferimento a un portafoglio composto da n polizze con premi pagabili all'inizio di ciascuno dei primi t anni e benefits riscuotibili all'inizio di ciascun anno dopo t. Supponiamo che le valutazioni siano effettuate nello stesso ambiente stocastico per il tasso d'interesse; in tal modo le attività e le passività risultano indipendenti solo condizionatamente alla conoscenza dello scenario dei tassi d'interesse. Indichiamo con x l'età d'ingresso in assicurazione, con k l'epoca di valutazione, con K la variabile aleatoria che rappresenta la vita residua della testa assicurata, con b_r la prestazione al tempo r relativa alla polizza considerata e con $J=K-k$ la variabile aleatoria che rappresenta l'intervallo temporale che intercorre dall'istante di valutazione all'eliminazione della testa assicurata. Ipotizziamo inoltre che le variabili casuali J siano indipendenti. Allora il valore attuale dei benefits futuri al tempo k è per l'i-ma polizza (si veda, per esempio, Coppola e Sibillo, 2003):

$$B_{i,k}(J)=\begin{cases}\sum_{r=t}^{k+J} b_r v(r-k) & k\le t\\ \sum_{r=k}^{k+J} b_r v(r-k) & k>t\end{cases} \tag{1}$$

essendo $v(r-k)$ il valore attuale in k di una unità di capitale disponibile in r.

Indicato poi con P_r il premio pagato per il singolo contratto al tempo r, possiamo definire il valore dei premi, valutati in k, pagabili all'inizio di ogni anno per t anni per ciascuna polizza:

$$P_{i,k}(J)=\begin{cases}\sum_{r=k}^{t-1} P_r v(r-k) & k\le t\\ 0 & k>t.\end{cases} \tag{2}$$

In tal modo per ciascuna polizza abbiamo la seguente perdita aleatoria valutata in k:

$$L_{i,k}(J,P)=B_{i,k}(J)-P_{i,k}(J) \tag{3}$$

ed il valore in k dell'intero portafoglio risulta:

$$S_{L,k}(J)=\sum_{i=1}^{n} L_{i,k}(J). \tag{4}$$

Intendendo la solvibilità nell'ambito delle problematiche assicurative come la capacità della compagnia a far fronte ai propri impegni in un contesto probabilistico, la riserva da accantonare, come differenza tra attività e passività, rappresenta una misura adeguata ad esprimere quantitativamente lo stato di solvibilità di una compagnia assicurativa. Consideriamo, quindi, il valore atteso della riserva da accantonare. Indichiamo con F_s il generico flusso di cassa al tempo s relativo alla polizza, sia esso prestazione o premio e supponiamo di trovarci al tempo di valutazione k.

Se:

$P(K=k)={}_{k/}q_x$

e

$P(K > k\ ) = {}_{k+1}p_x \qquad (k = 0,1,2,....)$

considerando un tempo $s \geq k$ e supponendo che l'assicurato di età x sia in vita in $s-1$, si ha:

$$\text{a) } F_{i,s} = \begin{cases} -P_{k+s} & {}_s p_{x+k_i} \\ 0 & {}_{s-1/}q_{x+k} \end{cases} \qquad F_0 = -P_k \tag{5}$$

con $1 \leq s < t-k$,

$$\text{b) } F_{i,s} = \begin{cases} b_{k+s} & {}_s p_{x+k} \\ 0 & {}_{s\text{-}1/}q_{x+k} \end{cases} \tag{6}$$

con $s \geq t-k$.

Segue che al tempo k la perdita aleatoria per ciascuna polizza si può scrivere come segue (si veda, per esempio, Coppola e Sibillo, 2003; Frees, 1990):

$$L_{i,k} = \sum_{s=k+1}^{\infty} F_{i,s} v(s-k) \tag{7}$$

e per l'intero portafoglio avremo:

$$S_L = \sum_{i=1}^{n} L_{i,k}. \tag{8}$$

Denotando con $\Im$ lo scenario stocastico per il tasso di interesse che influenza il rendimento degli investimenti della Compagnia e che è condiviso da tutte le polizze del portafoglio, ricaviamo che il valore atteso della riserva è:

$$E\left[L_{i,k}\right] = E\left[\sum_{s=k+1}^{\infty} F_{i,s} v(s-k)\right] =$$

$$= \sum_{s=k+1}^{\infty} E\left[E\left[\left(F_{i,s} v(s-k)\right)/\Im\right]\right] = \sum_{s=k+1}^{\infty} E\left[f_{i,s} v(s-k)\right] \tag{9}$$

dove $f_{i,s}$ è il valore atteso di $F_{i,s}$ noto il processo del tasso.

Supponendo che le variabili aleatorie $J_1, J_{2,}...., J_n$ siano indipendenti da $\Im$, possiamo ricavare la seguente perdita attesa di portafoglio:

$$E\left(S_{L,k}\right)=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=k+1}^{\infty}v\left(s-k\right)F_{i,s}\right)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=k+1}^{\infty}E\left[v\left(s-k\right)F_{i,s}\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=k+1}^{\infty}E\left[v\left(s-k\right)f_{i,s}\right]. \tag{10}$$

E naturalmente se *k=0* si ha:

$$E\left[S_L\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=k+1}^{\infty}E\left[v\left(s\right)f_{i,s}\right]. \tag{11}$$

4. La decomposizione della rischiosità della riserva. Il rischio di investimento.

Come noto la varianza rappresenta un adeguato strumento per la misurazione del rischio globale connesso ad un portafoglio assicurativo (Coppola *et al*., 2005). Utilizzando la teoria dei momenti condizionati calcoliamo il momento del secondo ordine della perdita globale in *t=0* del portafoglio (8). Si ha (si veda, per esempio, Coppola e Sibillo, 2003):

$$E\left[S_L^2\right]=E\left[E\left(S_L^2/\Im\right)\right] \tag{12}$$

$$E\left[S_L^2\right]=E\left[Var\left(S_L/\Im\right)\right]+E\left[E\left(S_L/\Im\right)\right]^2. \tag{13}$$

In base alla (8) calcolata in *k=0* si ha:

$$E\left[S_L^2\right] = E\left[Var\left(\sum_{i=1}^{n} L_i / \Im\right)\right] + E\left[E\left[\sum_i L_i / \Im\right]\right]^2 \qquad (14)$$

in cui per l'indipendenza delle $L_{i,0} = L_i$ condizionatamente al processo del tasso si ha:

$$E\left[S_L^2\right] = nE\left[Var\left(L_i / \Im\right)\right] + E\left[E\left[\sum_i L_i / \Im\right]\right]^2 =$$

$$= nE\left[E\left(\sum_s v(s) F_{is} / \Im\right)^2\right] -$$

$$nE\left[E\left(\sum_s v(s) F_{i,s} / \Im\right)\right]^2 + E\left[E\left(\sum_s v(s) F_{i,s} / \Im\right)\right]^2.$$

Con riferimento ad un portafoglio di n polizze, se:

$$F_s = \sum_{i=1}^{n} F_{i,s}$$

rappresenta il flusso di cassa del portafoglio al tempo s e se: $f_s = E(F_s)$ rappresenta il relativo valore atteso, si ottiene:

$$E\left[S_L^2\right] = nE\left(L_i^2\right) - nE\left[\sum_s v(s) f_{is}\right]^2 + E\left[\sum_s v(s) f_s\right] \quad (15)$$

da cui:

$$Var\left[S_L\right] = n\left\{E\left[L_i^2\right] - E\left[\sum_s v(s) f_{i,s}\right]^2\right\} +$$

$$+ E\left[\sum_s v(s) f_s\right]^2 - \left[E\left(S_L\right)\right]^2. \qquad (16)$$

A questo punto la quantificazione del contributo di ciascuna fonte di rischio alla rischiosità globale può essere ottenuta ricordando la formula di decomposizione della varianza (si veda, per esempio, Coppola *et al.*, 2005). In particolare, se la decomposizione è effettuata condizionatamente alla struttura stocastica dei tassi di interesse (Coppola *et al.*, 2002) otteniamo:

$$Var\left[S_L\right] = E\left[Var\left(S_L\right) \middle| \Im\right] + Var\left[E\left(S_L\right) \middle| \Im\right] \tag{17}$$

dove il primo termine al secondo membro è una misura del rischio assicurativo, dal momento che esso rappresenta il valore atteso della variabilità dovuta alla aleatorietà della mortalità ed il secondo termine rappresenta una misura del rischio di investimento, dal momento che fornisce la variabilità di S_L essendo stati mediati gli effetti della aleatorietà della mortalità.

In base alla (13) abbiamo:

$$Var\left[S_L\right] = E\left[Var\left(S_L / \Im\right)\right] + E\left[E\left(S_L / \Im\right)\right]^2 - \left[E\left(S_L\right)\right]^2$$

e, ricordando la (15), si ha:

$$E\left[Var\left(S_L / \Im\right)\right] = n\left\{E\left[L_i^{\,2}\right] - E\left[\sum_s v(s) f_{is}\right]^2\right\}. \tag{18}$$

Per differenza si ha l'espressione del rischio di investimento:

$$\begin{aligned} Var\left[E\left(S_L \middle| \Im\right)\right] &= E\left[E\left(S_L \middle| \Im\right)\right]^2 - \left[E\left(S_L\right)\right]^2 = \\ &= E\left[\sum_s v(s) f_s\right]^2 - \left[E\left(S_L\right)\right]^2 . \end{aligned} \tag{19}$$

5. Una esemplificazione numerica

Consideriamo un portafoglio di n=1000 polizze di annualità vitalizie anticipate e differite di 10 anni con capitali pagabili all'inizio di ciascun anno dopo t=10 a condizione che la testa sia in vita, supponendo che siano emesse tutte su teste di età x . Facendo riferimento, a scopo esemplificativo, a tre diverse età ($x = 30, x = 40, x = 50$) calcoliamo i premi equi, riportati in Tabella 3, utilizzando le tavole di mortalità di ingresso RG48:

Tabella 3. Premi equi

età	Premio equo
30	2,98556
40	2,27378
50	1,61896

Ponendo in evidenza che gli strumenti proposti per la quantificazione dei rischi sono caratterizzati dall'essere adattabili a qualsiasi scenario stocastico per il tasso, a scopo illustrativo qui supponiamo che il tasso istantaneo di rendimento degli investimenti dell'Istituto sia dato (Coppola *et al.,* 2000) dalla somma di una componente deterministica, δ_t, che può essere stimata sulla base dei rendimenti degli investimenti attuali della compagnia, ed una componente stocastica, X_t, che descrive le oscillazioni del tasso di rendimento effettivo rispetto ai valori per esso previsti; per cui il tasso istantaneo di rendimento globale è:

$$y_t = \delta_t + X_t \tag{20}$$

dove si suppone che $\{X_t, 0 \le t < \infty\}$ sia un processo Ornstein-Uhlenbeck di parametri $\beta > 0$ e $\sigma > 0$, e posizione iniziale $X_0 = 0$

Il fattore di attualizzazione può essere scritto come:

$$v_t^* = \exp\left\{-\int_0^t (\delta_s + X_s) ds\right\} = v_t \cdot f_t \tag{21}$$

dove v_t rappresenta il fattore di sconto deterministico e F_t rappresenta il fattore di sconto stocastico. Per poter applicare il modello ora descritto per il tasso di rendimento degli investimenti, utilizziamo le stime dei parametri del processo O.U. così come ottenuto in Coppola e Sibillo (2003): $\beta = 0{,}11$ e $\sigma = 0{,}005$ con una componente deterministica costante e uguale a $\delta = 0{,}04$. Calcoliamo quindi la varianza totale della riserva di portafoglio all'epoca di valutazione k =7 e quantifichiamo il rischio finanziario per ciascun portafoglio preso in considerazione facendo uso delle formule (16) e (19). I risultati ottenuti sono riportati nella Tabella 4; essi, confermando quanto ottenuto in Coppola *et al*., (2000), mettono in evidenza l'andamento decrescente della rischiosità globale del portafoglio e del rischio finanziario al crescere dell'età di entrata in assicurazione. Inoltre, dai dati contenuti in Tabella 4 emerge ancora una volta in modo chiaro il peso preponderante della componente di rischio di investimento.

Tabella 4. Rischio di investimento

Età di ingresso	Premio Equo	Varianza	Rischio di investimento	Misura % del rischio di investimento
30	2,98556	1.720.990	1.720.400	0,99966
40	2,27378	1.080.130	1.079.200	0,99914
50	1,61896	152.342	150.989	0,99112

5. Conclusioni

In questo lavoro, ipotizzando uno scenario stocastico per i tassi di interesse, abbiamo analizzato la rischiosità di un portafoglio di annualità vitalizie differite utilizzando un approccio fondato sulla valutazione della riserva. In particolare, dai risultati ottenuti è emerso come il rischio finanziario risulti la componente predominante nell'analisi della rischiosità globale.

Il modello ottenuto presenta la caratteristica di flessibilità essendo adattabile ai vari scenari stocastici descrittivi della mortalità e dell'interesse.

Ulteriori sviluppi di questo tema potranno riguardare sia l'introduzione della componente di rischio di longevità ed il conseguente rischio di proiezione, sia l'estensione degli argomenti trattati a portafogli assicurativi eterogenei.

Riferimenti bibliografici

Coppola M., Di Lorenzo E., Sibillo M. (2000), Risk sources in a life annuities portfolio: decomposition and measurement tools, *Journal of Actuarial Practice*, 8, 43-61.

Coppola M., Di Lorenzo E., Sibillo M. (2002), Stochastic Analysis in life Office Management: Applications to a Life Annuity Portfolio, *Applied Stochastic Models in Business and Industry,* 19, 31-42.

Coppola M., Di Lorenzo E., Sibillo M. (2003), Further remarks on risk sources measuring in the case of a life annuity portfolio, *Journal of Actuarial Practice,* 10, 229-242.

Coppola M., Di Lorenzo E., Sibillo M. (2002), Vincoli di coerenza per le misure dei rischi di un portafoglio assicurativo, *Liber Amicorum per Alessandro Di Lorenzo*, Prontostampa, Napoli, 109-118.

Coppola M., Di Lorenzo E., Sibillo M. (2005), Fair valuation schemes for life annuity contracts, *Proceedings of ASMDA 2005,* Brest (Bretagne), 893-902.

Coppola M., Sibillo M. (2003), The variability of a life portfolio reserve in the cash flow analysis approach, *Proceedings of the 6th Spanish-Italian Conference on Financial Mathematics*, Trieste, 171-182.

Di Lorenzo E., Sibillo M. (2002), Longevity risk: measurements and applications perspectives. *Proceedings of 2nd Conference in Actuarial Science and Finance on Samos*, Karlovassi (Grecia), http://www.stat.ucl.ac.be/Samos2002/proceedSibillo.pdf.

Frees E.W. (1990), Stochastic life contingencies with solvency considerations, *Transactions of the Society of Actuaries,* XLII, 91-148.

Frees E.W. (1998), Relative importance of risk sources in insurance systems, *North American Actuarial Journal*, 2, 34-52.

IAIS (2000), On solvency, solvency assessments and actuarial issues. Solvency & actuarial issue subcommittee. *IAIS*.

IAIS (2002), Principles on capital adequancy & solvency. Solvency & actuarial issue subcommittee. *IAIS.*

Marocco P., Pitacco E. (1998), Longevity risk and life annuity reinsurance, *Transaction of the 26th International Congress of Actuaries*, Birmingham, 6, 453-479.

Olivieri A. (1998), Per una quantificazione del longevity risk, A*tti del XXII Convegno AMASES*, Genova, 389-399.

Pandit S.M., Wu S.M. (1983), *Time series and systems analysis with applications*, J. Wiley, New York, 211-247.

Parker G. (1997), Stochastic analysis of the interaction between investment and insurance risks, *North American Actuarial Journal*, 1, 55-84.

Ragioneria Generale dello Stato (1995), *Tendenze evolutive della popolazione italiana*, Roma.