

Modelli a differenze frazionarie: uno studio su dati idrologici

Marcella Corduas

*Dipartimento di Scienze Statistiche, Università di Napoli Federico II
Centro di Specializzazione e Ricerche, Portici (NA)*

Summary: In this paper we discuss two classes of long memory time series models: ARFIMA and FEXP models. Moreover, we propose a preliminary estimator based on the search of the closest approximate ARMA model to a given ARFIMA model. Finally, we apply the proposed techniques to the case of the daily flows of Tevere in order to verify the stability of the long memory effect.

Keywords: Long Memory, ARFIMA Models, FEXP Models

1. Introduzione

I modelli a differenze frazionarie sono stati introdotti per descrivere la dinamica di serie storiche caratterizzate da strutture di dipendenza di lungo periodo in cui osservazioni, anche molto distanti nel tempo, presentano deboli legami di correlazione (Granger e Joyeaux, 1980; Hosking, 1981; Beran, 1994). Generalmente, tale effetto, denominato *lunga memoria*, è riconoscibile nell'andamento della funzione di autocorrelazione che tarda a decadere a zero e che persiste con valori significativi anche a ritardi molto elevati. Ovviamente, affinché tale struttura sia osservabile è necessario disporre di un numero considerevole di osservazioni.

In vari settori di indagine, molti fenomeni mostrano tale tipo di dinamica, per esempio, Diebold e Rudenbusch (1989,1991), Shea

(1991), Cheung (1993), Ray (1993), Delgado e Robinson (1994), Hassler e Wolters (1995) hanno considerato applicazioni a dati economici e finanziari, mentre Hosking (1984) ha esaminato il caso di dati meteorologici e idrologici. In quest'ultima tipologia, è ben nota la presenza di componenti di lunga memoria talora denominata *Hurst effect* o *Joseph effect* (Beran, 1994).

In questo lavoro introdurremo due classi di modelli: i modelli *ARFIMA* (Autoregressive Fractional Integrated Moving Average Models) e i modelli *FEXP* (Fractional Exponential Models) e proporrò l'uso di uno stimatore preliminare del parametro a differenze frazionarie. Inoltre, prenderemo in esame la serie storica delle portate giornaliere del Tevere per verificare l'applicabilità di tali tecniche in un caso reale e la stabilità dell'effetto di lunga memoria.

2. La modellistica

Sia X_t un processo stocastico lineare stazionario e Gaussiano con valor medio nullo caratterizzato da una funzione di autocorrelazione che decade a zero con un tasso iperbolico, ovvero

$$\rho(k) \sim ak^{2d-1}, \quad k \rightarrow \infty$$

dove a è una costante che non dipende da k e $0 < d < 0.5$. La struttura di correlazione è tale che $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) = \infty$. La corrispondente densità spettrale $f(\omega)$, $\omega \in [-\pi, \pi]$, presenta un picco all'origine, ovvero:

$$f_x(\omega) \sim b\omega^{-2d}, \quad \omega \rightarrow 0.$$

dove b è una costante che non dipende da ω . Tale comportamento caratterizza la presenza di una componente di lunga memoria che può essere formalizzata come segue:

$$f_x(\omega) = |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} f_z(\omega)$$

dove $0 < f_z(\omega) < \infty, \forall \omega \in [-\pi, \pi]$ è la funzione di densità spettrale assolutamente continua di un processo stocastico lineare stazionario Z_t . Come è noto, quest'ultima può essere approssimata:

1) con una funzione razionale di $(e^{-i\omega})$:

$$f_z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{|1 - \theta_1 e^{-i\omega} - \dots - \theta_q e^{-i\omega q}|^2}{|1 - \phi_1 e^{-i\omega} - \dots - \phi_p e^{-i\omega p}|^2}.$$

cosicché Z_t è un processo $ARMA(p, q)$, secondo la definizione classica di Box e Jenkins (1976), mentre $X_t \sim ARFIMA(p, d, q)$ è espresso come:

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)a_t$$

dove a_t è un processo White Noise con valor medio zero e varianza σ^2 . Qui e nel seguito indicheremo, come è d'uso, con B l'operatore ritardo tale che $B^k X_t = X_{t-k}$. Inoltre, i polinomi: $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ e $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ non hanno fattori in comune e ammettono radici tutte esterne al cerchio unitario;

2) con una forma esponenziale del tipo:

$$f_z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{\sum_{j=1}^k \delta_j \cos(j\omega)\right\}.$$

In tal caso, Z_t è rappresentato mediante un modello esponenziale della classe definita da Bloomfield (1973), mentre X_t che include la componente di lunga memoria segue un modello $FEXP$ (Beran, 1993).

Si osservi che la classe dei processi $FEXP$, a differenza di quelli $ARFIMA$, è definita in maniera implicita come l'insieme dei processi stocastici stazionari i quali posseggono una densità spettrale rappresentabile da una funzione esponenziale del tipo indicata. I parametri del modello non hanno, quindi, un significato interpretativo. I vantaggi di tale formulazione risiedono nella semplicità con cui può essere effettuata la stima dei corrispondenti parametri. Infatti, come vedremo ciò si risolve nella stima di un opportuno

modello di regressione lineare. Gli svantaggi, invece, sono connessi all'utilizzo di tali modelli a fini previsivi dal momento che comunque bisogna individuare la forma *causale* del processo (Bloomfield, 1973).

Considerando una struttura elementare è possibile mostrare la relazione che esiste tra le due classi di modelli. Supponiamo che $X_t \sim ARFIMA(1, d, 1)$ a cui è associato lo spettro:

$$g_x(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} \frac{1 + \theta^2 - 2\theta \cos(\omega)}{1 + \phi^2 - 2\phi \cos(\omega)}.$$

Considerando il logaritmo dello spettro:

$$\ln g_x(\omega) = \ln \sigma^2 - \ln(2\pi) - d \ln |1 - e^{-i\omega}|^2 + \ln(1 + \theta^2 - 2\theta \cos(\omega)) - \ln(1 + \phi^2 - 2\phi \cos(\omega))$$

e sviluppando in serie avremo:

$$\ln g_x(\omega) = \ln \sigma^2 - \ln(2\pi) - d \ln |1 - e^{-i\omega}|^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\theta^j - \phi^j}{j} \right) \cos(j\omega).$$

Per individuare un modello *FEXP*, in questo caso, bisogna approssimare la sommatoria presente nel lato destro della precedente relazione con la somma di un numero finito di termini, cosicché:

$$g_x(\omega) \simeq \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} \exp\left\{ \sum_{j=1}^k \delta_j \cos(j\omega) \right\},$$

$$\text{posto } \delta_j = 2 \left(\frac{\theta^j - \phi^j}{j} \right).$$

3. Problemi di identificazione e stima

Nelle analisi reali occorre tener conto di alcuni problemi che sorgono nell'usuale ciclo di identificazione → stima → verifica del modello. Al riguardo distingueremo il discorso per le due tipologie presentate nel paragrafo precedente.

Per quanto concerne i modelli *ARFIMA*, sono stati proposti vari metodi per la stima del parametro d dell'operatore differenziale frazionaria. Tale aspetto è strettamente connesso ai problemi di identificazione. Difatti, la procedura più comunemente adottata opera in due fasi: si stima preliminarmente il parametro d , e successivamente sulla serie filtrata si identificano le eventuali componenti *ARMA*.

I metodi di stima che utilizzano il logaritmo del periodogramma (si vedano, tra gli altri, Janacek, 1982, Geweke e Porter-Hudak, 1983, e più recentemente, Robinson, 1992, Hassler, 1993, Delgado e Robinson, 1996) risultano a tal fine piuttosto diffusi.

Posto n il numero di osservazioni della serie storica, l'iniziale proposta di Geweke e Porter-Hudack si fonda sulla stima del modello di regressione che pone in relazione il logaritmo del periodogramma osservato, $\ln(I_n(\omega_j))$, con la variabile $\ln|1 - \exp(-i\omega_j)|^2$, alle frequenze $\omega_j = 2\pi j/n$, $j = 1, \dots, M$. La numerosità M va opportunamente determinata affinché solo le frequenze più vicine all'origine siano prese in esame. La stima del parametro d è fornito dal coefficiente stimato di tale modello.

Le difficoltà relative all'utilizzo di questa tecnica risiedono nelle proprietà statistiche delle ordinate normalizzate del periodogramma che, nel caso di strutture a lunga memoria, non sono più asintoticamente né incorrelate né distribuite come variabili casuali esponenziali (Hurvich e Beltrao, 1994). La scelta di M è inoltre di particolare importanza poiché determina la distorsione, la varianza e l'errore quadratico medio dello stimatore. Varie proposte sono state elaborate sia per individuare un criterio con cui fissare tale numerosità sia per sfruttare il periodogramma perequato al fine di ridurre la distorsione che caratterizza lo stimatore (si veda Hurvich e Deo, 1999, e referenze ivi citate).

Una grande attenzione è stata anche rivolta ai metodi di stima, nel dominio temporale, basati sul metodo della massima verosimiglianza. Da un punto di vista numerico, i corrispondenti algoritmi richiedono particolare cautela, dal momento che la elevata numerosità delle osservazioni, da un lato, e la particolare struttura di auto-

correlazione, dall'altro, fanno sì che i costi computazionali diventino elevati.

Sowell (1992) ha proposto una procedura per calcolare la funzione di verosimiglianza esatta in maniera efficiente sfruttando la funzione ipergeometrica per il calcolo delle autocovarianze. Beran (1995), invece, ha sviluppato una approssimazione della funzione di verosimiglianza condizionata per la quale è possibile effettuare la stima con il metodo dei minimi quadrati; inoltre, Hanslett e Raftery (1989) hanno discusso gli aspetti connessi ai modelli spaziali.

In ambito spettrale, Fox e Taqqu (1986) e Dahlhaus (1989) hanno considerato il problema della stima nel dominio delle frequenze derivando la funzione di verosimiglianza e studiando in, modo specifico, le proprietà degli stimatori di Whittle e delle corrispondenti approssimazioni. In particolare nel seguito di questo lavoro faremo riferimento agli stimatori ottenuti massimizzando il profilo della funzione di verosimiglianza (Beran, 1994, p.117)

Per superare parte delle difficoltà computazionali, abbiamo proposto un metodo per stimare in via preliminare i parametri di un modello *ARFIMA* (Corduas, 2000). Esso si fonda sulla ricerca del modello *ARFIMA* più vicino ad un particolare modello *proxy* della classe *ARMA*, adattato alle osservazioni. La nozione di vicinanza è tradotta nella misura della distanza tra i pesi Autoregressivi proposta da Piccolo (1984, 1990).

A tal fine ricordiamo che poichè $X_t \sim ARFIMA(p, d, q)$ è un processo invertibile, esso può essere espresso in una forma $AR(\infty)$:

$$\pi_F(B)X_t = a_t,$$

dove:

$$\pi_F(B) = \theta^{-1}(B)\phi(B)(1 - B)^d = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{Fj}B^j$$

ed inoltre,

$$(1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k B^k,$$

essendo:

$$\alpha_k = (-1)^k \Gamma(d+1) / [\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)]$$

e ove $\Gamma(y)$ è la funzione Gamma.

E' ben noto dai primi contributi (Lawrance e Kottegoda, 1977; Hosking, 1984) che un modello $ARMA(1, 1)$ può ben approssimare una struttura $ARFIMA(0, d, 0)$. Inoltre, Tiao e Tsay (1994) hanno suggerito che un modello $ARMA$ produce ancora buone previsioni per una serie con lunga memoria laddove si utilizzi una procedura di stima adattiva ed hanno mostrato che gli stimatori di massima verosimiglianza per i parametri del modello *proxy* (cioè quello "errato") della classe $ARMA$ sono consistenti.

Estendendo tale argomento, abbiamo proposto di approssimare un modello $ARFIMA(p, d, q)$ con un modello $ARMA(p+1, q+1)$ che indicheremo con: $\varphi(B)X_t = \vartheta(B)b_t$. Ovviamente, poiché in realtà $X_t \sim ARFIMA(p, d, q)$, ne consegue che b_t non è un processo White Noise, ma piuttosto è esso stesso un processo $ARFIMA$ così specificato:

$$b_t = \varphi(B)\vartheta^{-1}(B)\theta(B)\phi^{-1}(B)(1-B)^{-d}a_t.$$

Indichiamo con $\pi_P(B) = \varphi(B)\vartheta^{-1}(B)$ il polinomio $AR(\infty)$ della formulazione puramente Autoregressiva del modello proxy, con $\{\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_{p+1}, \hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_{q+1}, \hat{\sigma}_b^2\}$ gli stimatori di massima verosimiglianza dei parametri di tale modello e, infine, i con $\{\hat{\pi}_{Pj}\}$ i corrispondenti stimatori per i parametri della forma $AR(\infty)$.

Le stime preliminari $\hat{\beta}$ del vettore dei parametri del modello $ARFIMA$, $\beta_0 = \{\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, d\}$, possono essere ottenute minimizzando:

$$\delta_m(\beta) = \sum_{j=1}^m (\pi_{Fj}(\beta) - \hat{\pi}_{Pj})^2$$

rispetto a β . Si osservi che $\sqrt{\delta_m(\hat{\beta})}$ è la distanza Euclidea (Piccolo, 1984, 1990) tra i pesi delle formulazioni $AR(\infty)$ tra il modello proxy

stimato a partire dalle osservazioni e l'elemento più vicino nella classe dei modelli *ARFIMA*. Nel paragrafo seguente mostreremo come tale metodo di stima preliminare possa essere applicato in una analisi reale.

Nel caso dei modelli *FEXP* la fase di stima risulta piuttosto agevole in quanto è nuovamente ricondotta a quella di un modello di regressione essendo:

$$\log(I_n(\omega_j)) = \delta_0 + d(2 \ln(2 \operatorname{sen}(0.5\omega_j))) + \sum_{r=1}^k \delta_r \cos(r\omega_j) + \varepsilon_j$$

con $\omega_j = 2\pi j/n$, $j = 1, \dots, [(n-1)/2]$. Il numero k di regressori viene individuato iterativamente partendo dal modello più parsimonioso.

Beran (1993) sottolinea la semplicità dell'approccio assieme alla possibilità di sfruttare il software comunemente disponibile per i modelli lineari e che fornisce quindi stime, opportune diagnostiche nonché gli intervalli di confidenza. Tale considerazione risulta esaltata anche dalla generalizzazione della formulazione del modello *FEXP* in cui non necessariamente devono essere incluse funzioni del tipo $\cos(r\omega)$, $r = 1, \dots, k$, ma possono essere prese in esame funzioni alternative, $h_r(\omega)$, caratterizzate dalle seguenti proprietà:

- i) $h_r(\omega)$ è una funzione continua sull'intervallo $[-\pi, \pi]$;
- ii) $h_r(\omega) = h_r(-\omega)$, $\forall \omega$;
- iii) per ciascun n , posto $h_0(\omega_j) = 1$, la matrice dei regressori $[h_0(\omega_j), h_1(\omega_j), \dots, h_k(\omega_j)]_{j=1}^{[(n-1)/2]}$ è non singolare.

In tal modo i modelli *FEXP* possono essere reinterpretati come modelli lineari generalizzati. Nel seguito di questo lavoro utilizzeremo la formulazione inizialmente descritta.

4. Una applicazione a dati idrologici: la serie delle portate del Tevere

E' stata presa in esame la serie storica delle portate giornaliere del Tevere, misurata a Roma Ripetta, dal 1 gennaio 1930 al 31 dicembre 1981. L'interesse per tale tipologia di dati deriva, prima di tutto dalla frequenza di rilevazione -solitamente sono state

esaminate le serie delle medie mensili- e inoltre dalla necessità di identificare l'effetto di lunga memoria nonché di verificarne la stabilità nel tempo. Quest'ultimo aspetto risulta rilevante soprattutto in sede di simulazione.

A tal fine la serie storica è stata suddivisa in 9 sotto-serie di 4383 osservazioni (cioè 12 anni) le quali presentano un quinquennio (il primo o l'ultimo) in comune (Figura 1.)

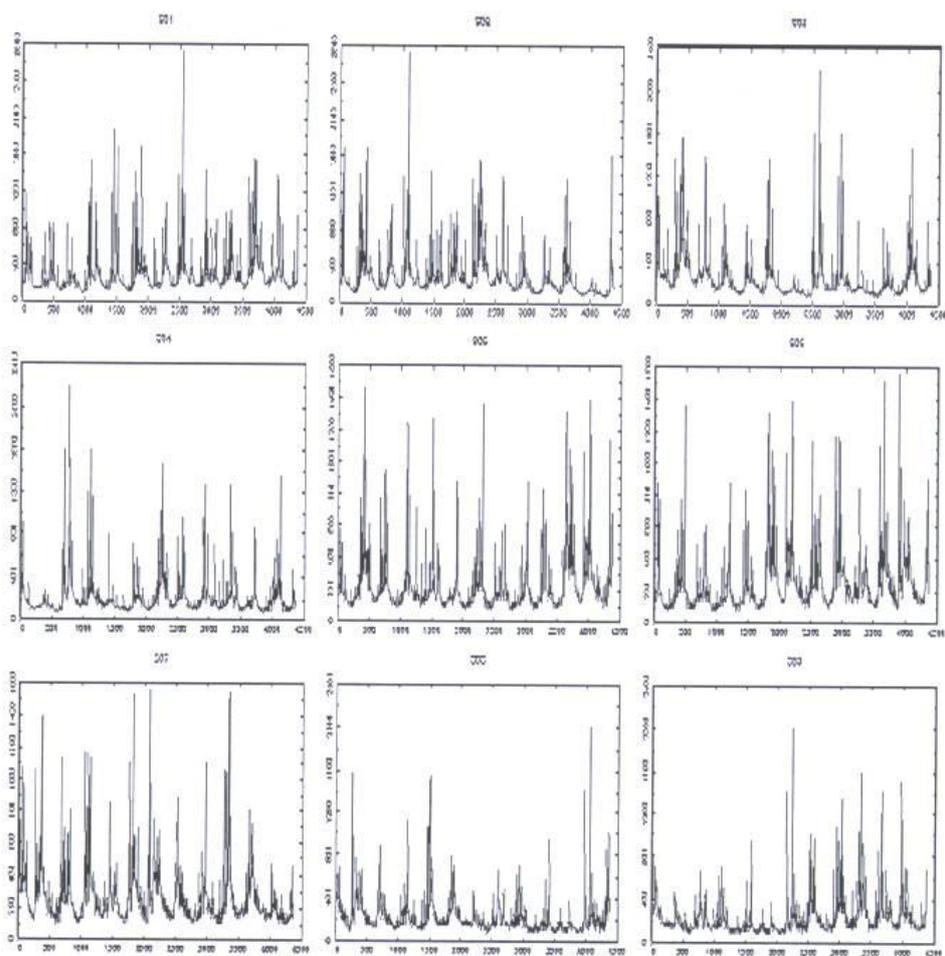


Figura 1. Serie storica delle portate giornaliere del Tevere, misurata a Roma Ripetta. Grafici (per riga) delle serie negli anni: 31-42, 35-46, 40-51, 45-56, 50-61, 55-66, 60-71, 65-76, 70-81

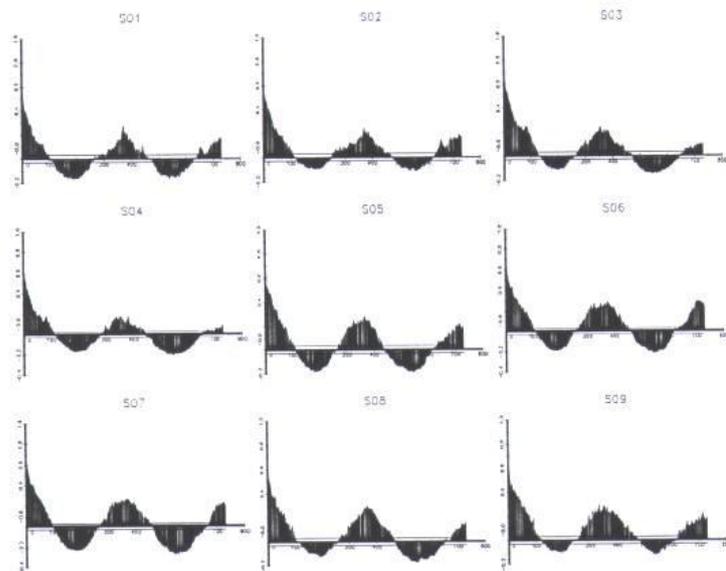


Figura 2. Funzioni di autocorrelazione delle 9 sottoserie

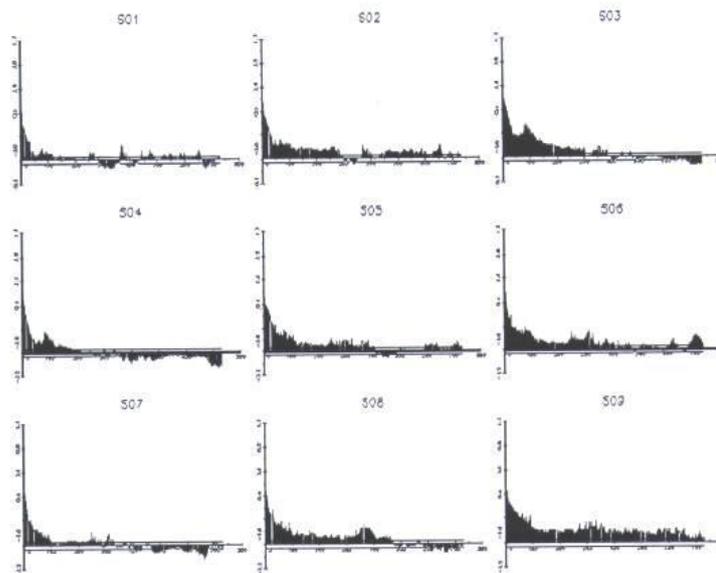


Figura 3. Funzioni di autocorrelazione dei residui dal modello di regressione per le 9 sottoserie

Tabella 1. Modello ARFIMA(4,d,0): stime di Whittle

SERIE	d	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
1	0.32	0.87	-0.40	0.20	-0.08
2	0.40	0.80	-0.40	0.21	-0.10
3	0.35	0.84	-0.39	0.16	-0.03
4	0.42	0.73	-0.36	0.15	-0.08
5	0.36	0.76	-0.34	0.16	-0.06
6	0.37	0.81	-0.31	0.06	0.01
7	0.38	0.80	-0.33	0.05	0.01
8	0.38	0.72	-0.25	0.03	-0.02
9	0.37	0.60	-0.18	0.02	-0.02

Tabella 2. Modello ARFIMA(4,d,0): stime preliminari

SERIE	d	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
1	0.27	0.92	-0.42	0.21	-0.07
2	0.32	0.88	-0.43	0.22	-0.07
3	0.35	0.84	-0.40	0.17	-0.08
4	0.38	0.77	-0.37	0.16	-0.07
5	0.32	0.81	-0.35	0.17	-0.05
6	0.33	0.84	-0.32	0.06	0.01
7	0.39	0.79	-0.33	0.05	0.01
8	0.33	0.77	-0.27	0.04	-0.01
9	0.30	0.67	-0.19	0.03	-0.01

Tabella 3. Modello FEXP

SERIE	d	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3
1	0.34	6.52	1.71	-0.01	0.13
2	0.38	6.40	1.67	-0.16	0.13
3	0.32	8.13	1.77	-0.05	0.14
4	0.38	5.93	1.58	-0.18	0.10
5	0.39	5.87	1.41	-0.10	0.06
6	0.39	5.89	1.59	0.01	-0.04
7	0.38	5.91	1.62	-0.00	-0.09
8	0.34	5.77	1.57	0.01	-0.06
9	0.37	6.06	1.19	-0.02	-0.05

Dalla analisi delle funzioni di autocorrelazione (Figura 2) e del periodogramma (qui non riportato) è emersa con chiarezza la presenza di una componente deterministica caratterizzata da periodo $P=365.25$ corrispondente all'anno solare. Per tale motivo, su ciascuna sottoserie è stato inizialmente stimato il seguente modello di regressione (per semplicità di notazione indicheremo la generica sottoserie con W_t):

$$W_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi}{365.25}t\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{2\pi}{365.25}t\right) + X_t$$

cosicchè tutte le operazioni successive sono state condotte sulle serie ottenute come residui da tale modello e di cui riportiamo le funzioni di autocorrelazione in Figura 3. Dall'analisi del loro andamento appare ora evidente la lenta decadenza a zero cosicchè risulta lecito ipotizzare una forma di modello con una componente di lunga memoria.

Attraverso la fase iterativa di identificazione e verifica si è proceduto quindi alla stima di due strutture appartenenti alle tipologie prima descritte: un modello $ARFIMA(4, d, 0)$ ed un modello $FE-XP$. Dato l'elevato numero di osservazioni da trattare si è ricorso a stime spettrali; nel primo caso si sono considerati gli stimatori di Whittle, nel secondo abbiamo formulato il seguente modello di regressione:

$$\log(I_n(\omega_j)) = \delta_0 + d(2 \ln(2 \operatorname{sen}(0.5\omega_j))) + \delta_1 \cos(\omega_j) + \delta_2 \cos(2\omega_j) + \delta_3 \cos(3\omega_j) + \varepsilon_j$$

dove $I_n(\omega_j)$ è il periodogramma osservato alle frequenze $\omega_j = 2\pi j/n$, $j = 1, \dots, [(n-1)/2]$.

Nella Figura 4 sono presentati per ciascuna sottoserie i grafici del logaritmo del periodogramma rispetto al logaritmo della frequenza, su cui sono sovrapposti i valori adattati dal modello di regressione. Si osserva una relazione non lineare che viene ben spiegata dal modello, il quale raggiunge un buon adattamento anche alle basse frequenze, laddove si concentra l'effetto di lunga memoria.

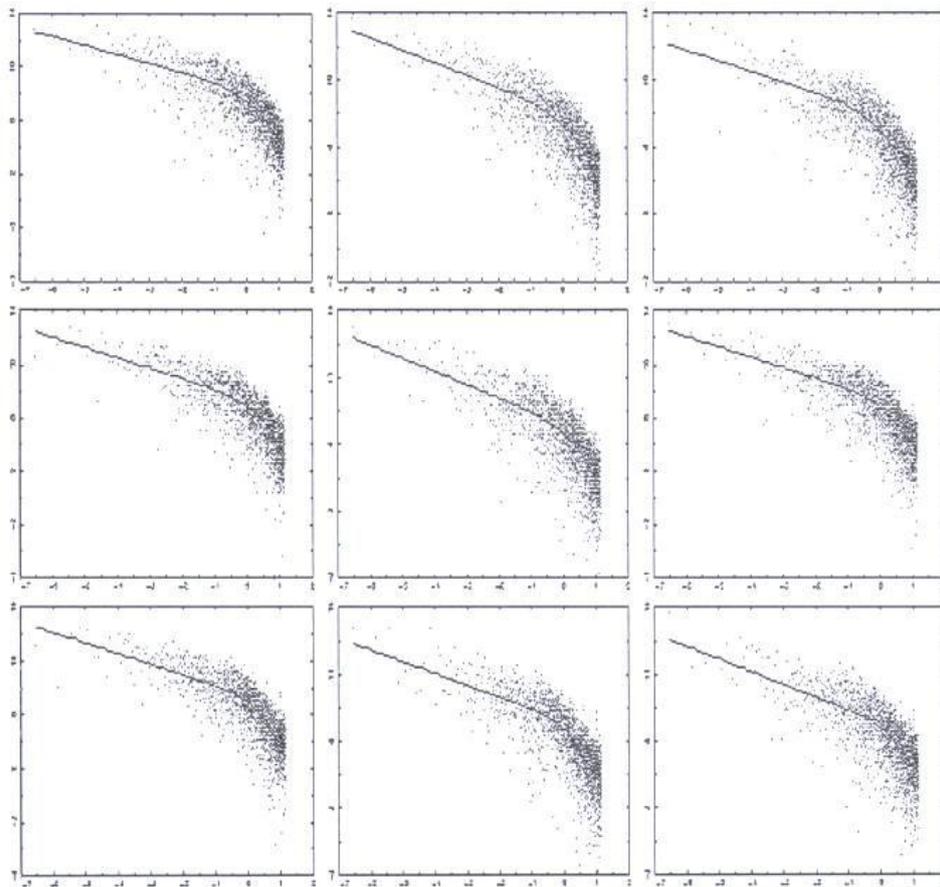


Figura 4. Logaritmo del periodogramma e valori adattati dal modello *F-EXP*

Nelle Tabelle 1 e 3 sono riportati i risultati per le diverse sottoserie; inoltre, nella Tabella 2, sono indicate le stime iniziali per i parametri del modello *ARFIMA* prodotte applicando la metodologia proposta nel paragrafo precedente.

Emerge con chiarezza la sostanziale stabilità delle stime ottenute per le varie sottoserie. Ciò viene confermato per entrambi i tipi di modellistica rafforzando così la convinzione che i dati giornalieri possano essere utilmente sfruttati in sede di simulazione. Inoltre, nel caso dei modelli *ARFIMA* lo stimatore preliminare proposto fornisce valori iniziali estremamente vicini alle stime finali.

5. Considerazioni finali

In questo articolo abbiamo esaminato due classi di modelli: i modelli ARFIMA, che più comunemente sono utilizzati per descrivere serie storiche caratterizzate da componenti di lunga memoria, e i modelli FEXP, che invece sono stati introdotti più recentemente come generalizzazione al caso di differenze frazionarie dei modelli di Bloomfield. Entrambe le modellistiche sono state applicate in un caso reale effettuando un confronto con uno stimatore preliminare per il parametro delle differenze frazionarie.

Ringraziamenti: Questo lavoro è stato presentato nell'ambito dei "Seminari di Statistica" svolti nel 1999 presso il Centro di Portici in occasione del "Quarantennale" di tale Istituzione. La ricerca è stata realizzata con parziale finanziamento MURST. Desidero ringraziare in particolar modo l'ing. Salvatore Grimaldi, dell'Università di Roma "La Sapienza", il quale ha fornito i dati su cui sono stati elaborati i vari modelli ed ha sollecitato l'interesse per la ricerca svolta.

Riferimenti bibliografici

Beran J. (1993) Fitting Long Memory Models by Generalized Linear Regression, *Biometrika*, 80, 817-822

Beran J. (1994) *Statistics for Long Memory Processes*, Chapman and Hall, New York

Beran J. (1995) Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models, *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 57, 659-672

Bloomfield P. (1973) An Exponential Model for the Spectrum of a Scalar Time Series, *Biometrika*, 60, 217-226

Box G.E.P., Jenkins G.W. (1976) *Time Series Analysis: forecasting and control*, Holden-Day, San Francisco

Cheung Y. W. (1993) Long Memory in Foreign Exchange Rates, *Journal of Business and Economic Statistics*, 11, 93-101

Corduas M. (2000) A Preliminary Estimator for ARFIMA Models, *XIV COMPSTAT Conference, Utrecht (NL)*, (lavoro accettato per la pubblicazione)

Dahlhaus R. (1989) Efficient Parameter Estimation for Self Similar Processes, *Annals of Statistics*, 17, 1749-1766

Delgado M.A., Robinson P.M. (1994) New Methods for the Analysis of Long-Memory Time Series: Application to Spanish Inflation, *Journal of Forecasting*, 13, 97-107

Delgado M.A., Robinson P.M. (1996) Optimal Spectral Bandwidth for Long Memory, *Statistica Sinica*, 6, 97-112

Diebold F.X., Rudebusch G.D.(1989) Long Memory and Persistence in Aggregate Output, *Journal of Monetary Economics*, 24, 189-209

Diebold F.X., Rudebusch G.D.(1991) Is consumption too smooth? Long memory and the Deaton Paradox, *The Review of Economics and Statistics*, 73,1-9

Fox R., Taqqu M.S. (1986) Large Sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series, *Annals of Statistics*, 14, 517-532

Geweke J., Porter-Hudak S. (1983) The Estimation and Application of Long-Memory Time Series, *Journal of Time Series Analysis*, 4, 231-238

Granger C.W.J., Joyeaux J. (1980) An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing, *Journal of Time Series Analysis*, 1, 15-30

Haslett J., Raftery A. (1989) Space-time Modelling with Long-memory Dependence: assessing the Ireland's wind power resource, *Journal of Applied Statistics*, 38, 1-21

- Hassler U. (1993) Regression of Spectra Estimators with Fractionally Integrated Time Series, *Journal of Time Series Analysis*, 14, 369-380 (e correzioni, 14, 549)
- Hassler U., Wolters J. (1995) Long Memory in Inflation Rates: International Evidences, *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, 37-45
- Hosking J.R.M. (1981) Fractional Differencing, *Biometrika*, 68, 165-176
- Hosking J.R.M. (1984) Modeling Persistence in Hydrological Time Series Using Fractional Differencing, *Water Resources Research*, 20, 1898-1908
- Hurvich C.M., Deo R.S. (1999) Plug-in Selection of the Number of Frequencies in Regression Estimates of the Memory Parameter of a Long-memory Time Series, *Journal of Time Series Analysis*, 20, 331-342
- Janacek G.J. (1982) Determining the Degree of Differencing for Time Series via the Log Spectrum, *Journal of Time Series Analysis*, 3, 177-183
- Lawrance A.J., Kottegoda N.T. (1977) Stochastic Modelling of Riverflow Time Series, *Journal of the Royal Statistical Society, A*, 140, 1-47
- Piccolo D. (1984) Una topologia per la classe ARIMA, *Statistica*, 44, 47-59
- Piccolo D. (1990) A Distance Measure for Classifying ARIMA Models, *Journal of Time Series Analysis*, 11, 153-164
- Ray B.K. (1993) Long Range Forecasting of IBM Product Revenue using a Seasonal Fractionally Integrated Differenced ARMA Model, *International Journal of Forecasting*, 9, 255-269
- Robinson P.M. (1992) Log-periodogram Regression of Time Series with Long Range Dependence, *Annals of Statistics*, 23, 1048-1072
- Shea G.S. (1991) Uncertainty and Implied Variance Bounds in Long Memory Models of Interest Rate Terms in Structure, *Empirical Economics*, 16, 287-312

Sowell F. (1992) Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models, *Journal of Econometrics*, 53, 165-188

Tiao G.C., Tsay R. (1994) Non Linear and Adaptive Modelling in Time Series, *Journal of Forecasting*, 13, 109-131